

# Probabilités 1 – Univers et probabilités

## Plan du chapitre

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Formalisme des probabilités</b>                 | <b>1</b>  |
| 1.1      | Univers  | 1         |
| 1.2      | Probabilité sur un univers                         | 2         |
| 1.3      | Exemples d'expériences aléatoires                  | 5         |
| <b>2</b> | <b>Probabilités conditionnelles</b>                | <b>6</b>  |
| 2.1      | Définition   | 6         |
| 2.2      | Formule des probabilités composées                 | 7         |
| 2.3      | Formule des probabilités totales                   | 9         |
| 2.4      | Formule de Bayes — retournement de conditionnement | 10        |
| <b>3</b> | <b>Indépendance d'événements</b>                   | <b>11</b> |
| 3.1      | Indépendance de deux événements                    | 11        |
| 3.2      | Événements mutuellement indépendants               | 13        |
| <b>4</b> | <b>Méthodes pour les exercices.</b>                | <b>14</b> |

### Hypothèse

Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  désigne un univers fini et  $\mathbb{P}$  est une probabilité définie sur  $\Omega$  (cf définitions ci-dessous).

## 1 Formalisme des probabilités

Afin d'étudier rigoureusement les probabilités, on dispose d'un vocabulaire spécifique qui n'est pas utilisé dans les autres branches des mathématiques.

### 1.1 Univers

#### Définition 36.1

On appelle univers un ensemble non vide (généralement noté  $\Omega$ ). Dans ce chapitre, on se restreint aux univers finis, c'ad aux univers  $\Omega$  qui ont un nombre fini d'éléments.

L'univers qu'on va choisir dépendra de l'expérience aléatoire qu'on considère.  $\Omega$  sera choisi de telle sorte que, pour une expérience aléatoire donnée, chaque résultat possible correspond à un élément de  $\Omega$ .

**Exemple 1.** Si on lance une pièce, les deux résultats possibles sont Pile (P) et Face (F). On peut donc prendre  $\Omega = \{P, F\}$ , ou de manière équivalente  $\Omega = \{0, 1\}$  si on associe 0 à Pile et 1 à Face.

**Exemple 2.** Si on lance un dé à six faces, on prendra l'univers

$$\Omega = \dots\dots\dots$$

**Exemple 3.** Si on lance deux dés (de couleurs différentes) à six faces, on prendra l'univers

$$\Omega = \dots\dots\dots$$

**Définition 36.2**

- Une partie  $A \subset \Omega$  est appelée un événement.
- Un singleton  $\{\omega\} \subset \Omega$  est appelé un événement élémentaire.
- Un élément  $\omega \in \Omega$  est appelé un résultat ou encore une issue.

Un événement n'est donc rien d'autre qu'un sous-ensemble d'un univers. L'ensemble de tous les événements correspond donc à  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

**Exemple 4.** Si on lance un dé à six faces, l'événement "le résultat du dé est pair" correspond à

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$$

L'événement "le résultat du dé vaut au moins 5" correspond à

$$B = \{5, 6\} \subset \Omega$$

**Définition 36.3**

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits disjoints (ou incompatibles) si  $A \cap B = \emptyset$ .

- Exemple 5.**
- Les deux événements  $A$  et  $B$  de l'exemple précédent ne sont pas incompatibles car  $A \cap B = \{6\}$ .
  - Tout événement  $A$  est incompatible avec son complémentaire  $\bar{A}$ .

**1.2 Probabilité sur un univers**

**Définition 36.4**

On appelle probabilité sur  $\Omega$  toute application

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

qui vérifie :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Additivité : Pour tous événements  $A$  et  $B$  **disjoints**,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

On dit alors que  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini (car  $\Omega$  est fini).

**Théorème 36.5**

Une probabilité  $\mathbb{P}$  est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les événements élémentaires, i.e. par les valeurs  $\mathbb{P}(\{\omega\})$  avec  $\omega \in \Omega$ .

De plus, on a  $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$ .

*Démonstration.*

□

**Théorème 36.6**

Soit  $(z_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une famille de réels. On dit que  $(z_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une densité de probabilités si

$$\sum_{\omega \in \Omega} z_\omega = 1 \quad \text{et} \quad z_\omega \geq 0 \text{ pour tout } \omega \in \Omega$$

Dans ce cas, il existe une et une seule probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  qui vérifie  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = z_\omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

Autrement dit, il suffit de définir / connaître  $\mathbb{P}(\{\omega\})$  pour tout  $\omega \in \Omega$  pour définir / connaître  $\mathbb{P}(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Théorème 36.7**

On appelle probabilité uniforme sur  $\Omega$  la probabilité  $\mathbb{P}$  pour laquelle chaque événement élémentaire est équiprobable :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

Dans ce cas, pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

*Démonstration.* Soit la famille  $(z_\omega)_{\omega \in \Omega}$  définie par  $z_\omega = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . On vérifie facilement que cette famille est une densité de probabilité. Ainsi, on définit bien une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  en posant  $\mathbb{P}(\omega) = z_\omega$ . Montrons la formule sur  $\mathbb{P}(A)$  :

□

Lorsque  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , on peut représenter sur un graphe les valeurs de  $\mathbb{P}(\{\omega\})$ , sous forme d’histogrammes ou de “bâtonnets”. Par ce qui précède, cette représentation caractérise la probabilité  $\mathbb{P}$ .

**Exemple 6.** Si  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{n}$ . La probabilité  $\mathbb{P}$  se représente donc ainsi :

### Théorème 36.8 – Propriétés des probabilités

(Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $\Omega$ ). Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ . On a :

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2.  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
4. Si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

*Démonstration.*

□

### 1.3 Exemples d'expériences aléatoires

#### Méthode

La résolution d'un problème de probabilité suit *a priori* le processus suivant :

1. Identifier l'univers  $\Omega$ , i.e. un ensemble qui permet de représenter toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire considérée (peu importe la probabilité de ces issues).
2. Identifier la probabilité  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , qui fixe la probabilité qu'un résultat ou qu'un évènement se produise.
3. Calculer la probabilité  $\mathbb{P}(A)$  d'un évènement  $A$  qui nous intéresse.

On verra que dans le chapitre suivant, on simplifiera cette démarche en sautant les deux premières étapes, mais il est important d'avoir en tête ce que l'on cache sous le tapis.

**Exemple 7.** On lance deux dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilité que la somme des dés soit 7 ?

**Exemple 8.** On lance un dé qui est pipé : il y a une chance sur deux que le résultat soit 6, les autres résultats étant équiprobables. Quelle est la probabilité  $\mathbb{P}$  correspondante ? Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat pair ?

Dans cet exemple, la probabilité  $\mathbb{P}$  se représente graphiquement ainsi :

## 2 Probabilités conditionnelles

### 2.1 Définition

#### Définition 36.9

Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$  tels que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . On appelle probabilité (conditionnelle) de  $A$  sachant  $B$  le réel noté :

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$\mathbb{P}(A | B)$  représente la probabilité que  $A$  se produise **sachant que  $B$  s'est produit**. On prendra garde au fait que la notation est trompeuse : bien qu'on écrive  $\mathbb{P}(A | B)$ , " $A | B$ " n'est pas un événement. On trouve également la notation  $\mathbb{P}_B(A)$  au lieu de  $\mathbb{P}(A | B)$ .

**Remarque.** Comme  $A \cap B \subset B$ , on a  $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$  si bien que  $\mathbb{P}(A | B) \in [0, 1]$  : c'est cohérent car  $\mathbb{P}(A | B)$  représente une probabilité.

**Exemple 9.** On tire une pièce deux fois, on note :

- $A$  l'événement "deux faces ont été obtenues"
- $A'$  l'événement "deux piles ont été obtenus".
- $B$  l'événement "au moins un pile a été obtenu".

Calculer  $\mathbb{P}(A | B)$  et  $\mathbb{P}(A' | B)$ .

**Théorème 36.10**

Soit  $B$  un événement de  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B = \mathbb{P}(\cdot | B) : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A | B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $\Omega$ .

$\mathbb{P}(\cdot | B)$  étant une probabilité, elle hérite ainsi des propriétés vérifiées par toute probabilité :

**Théorème 36.11**

Soit  $B$  un événement de  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , et  $A, A'$  deux événements de  $\Omega$ . On a :

1.  $\mathbb{P}(\Omega | B) = 1$  et  $\mathbb{P}(\emptyset | B) = 0$
2.  $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$
3. Si  $A$  et  $A'$  sont des événements incompatibles, on a
  
4. Si  $A \subset A'$ , alors
  
5. Sans hypothèse sur  $A$  et  $A'$ ,

**2.2 Formule des probabilités composées****Lemme 36.12**

Pour tous événements  $A$  et  $B$ ,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B)$$

avec la convention  $\mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = 0$  si  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

Si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , le réel  $\mathbb{P}(A | B)$  n'a pas de sens en soi. Cependant, avec la convention donnée, la formule est valide car elle se réduit à  $0 = 0$  : en effet si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , alors  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$  car  $A \cap B \subset B$ .

**Théorème 36.13 – Formule des probabilités composées**

Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

*Démonstration.*

On procède par récurrence sur  $n$ .

- Pour  $n = 2$ , on a

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1)$$

d'où la propriété est vraie au rang 2.

- Soit  $n \geq 2$  un entier. On suppose la formule vraie au rang  $n$ . Montrons-la au rang  $n + 1$ , i.e. montrons que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \mathbb{P}(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

On pose  $B = A_n \cap \dots \cap A_1$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n \cap \dots \cap A_1) &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} | B) \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Avec le lemme ci-dessus :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_n \cap A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \\ &= \mathbb{P}(A_n \cap B_{n-1}) \quad \text{avec } B_{n-1} = A_{n-1} \cap \dots \cap A_1 \\ &= \mathbb{P}(A_n | B_{n-1}) \mathbb{P}(B_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots \cap A_1) \end{aligned}$$

on peut répéter le processus pour  $\mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots \cap A_1)$  en posant  $B_{n-2} = A_{n-2} \cap \dots \cap A_1$ . Par récurrence, on obtient donc

□

Cette formule est particulièrement utilisée lorsque  $A_1, \dots, A_n$  forment une suite d'événements "chronologiques" qui ne sont pas indépendants.

**Exemple 10.** On dispose d'une urne avec 4 boules rouges et 5 boules noires. On tire successivement 3 boules, sans remise. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?

**Exemple 11.** On suppose maintenant qu'on tire 3 boules de l'urne en une fois, simultanément. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?

### 2.3 Formule des probabilités totales

#### Définition 36.14

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une famille d'événements  $(B_1, \dots, B_n)$  de  $\Omega$  est appelé un système complet d'événements (S.C.E.) de  $\Omega$  si :

- Les ensembles  $B_1, \dots, B_n$  sont disjoints deux à deux, i.e. pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$ , on a  $B_i \cap B_j = \emptyset$ .
- La réunion des  $B_1, \dots, B_n$  donne l'univers  $\Omega$ , i.e.  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ .

Cela revient presque à dire que les  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  forment une partition de  $\Omega$ , mais on n'impose pas la condition que chaque ensemble  $B_i$  soit non vide.

**Exemple 12.** Pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ , la famille  $(A, \bar{A})$  forme un système complet d'événements de  $\Omega$ .

**Exemple 13.** La famille des événements élémentaires  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  forme un S.C.E. de  $\Omega$ . Dans l'exemple d'un lancer de dé à six faces, ce S.C.E. correspond à

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

#### Théorème 36.15 – Formule des probabilités totales

Soit  $(B_1, \dots, B_n)$  un système complet d'événements. Alors pour tout événement  $A$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \mid B_i) \mathbb{P}(B_i) \end{aligned}$$

avec la convention  $\mathbb{P}(A \mid B_i) \mathbb{P}(B_i) = 0$  si  $\mathbb{P}(B_i) = 0$ .

*Démonstration.*

□

**Remarque.** En particulier, avec  $A = \Omega$ , on trouve que  $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\Omega \cap B_i)$ , c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) = 1$ . Cette formule est vérifiée pour tout S.C.E.  $(B_1, \dots, B_n)$ .

**Exemple 14.** Cette formule sert souvent en conjonction avec la formule de Bayes, cf exemple 15 qui suit.

## 2.4 Formule de Bayes — retournement de conditionnement

### Théorème 36.16 – Formule de Bayes

Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $\mathbb{P}(A) > 0$ . On a :

avec la convention  $\mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = 0$  si  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

*Démonstration.*

□

La formule de Bayes est un grand classique : elle permet de “retourner” un conditionnement. Bien souvent, pour trouver  $\mathbb{P}(A)$ , on utilise la formule des probabilités totales.

**Exemple 15.** Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test pour détecter cette maladie. Si la personne est malade, le test détectera la maladie dans 99% des cas. Si la personne n'est pas malade, le test sera positif dans 0,1% des cas. **Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.**

- Exemple 16.**    ◦ La probabilité de faux négatif d'un test est la probabilité que le test soit négatif à tort (la personne est en fait malade).
- La probabilité de faux positif d'un test est la probabilité que le test soit positif à tort (la personne est en fait saine).
- Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité de faux négatif ? de faux positif ?

**Exemple 17.**

### 3 Indépendance d'événements

#### 3.1 Indépendance de deux événements

##### Définition 36.17 – Indépendance

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Le Théorème suivant fournit un éclairage saisissant :

##### Théorème 36.18

Soit  $A$  et  $B$  deux événements avec  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  et  $B$  sont indépendants
2.  $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$

*Démonstration.*

□

Cela implique en particulier que, si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  a la même probabilité de se produire sachant que  $B$  est réalisé (i.e.  $\mathbb{P}(A | B)$ ) comparé au cas où on ne sait pas si  $B$  s'est réalisé ou non (i.e.  $\mathbb{P}(A)$ ).

**Théorème 36.19**

$A$  et  $B$  sont des événements indépendants ssi  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

*Démonstration.*

□

En particulier, si  $\mathbb{P}(\bar{B}) > 0$ , on a donc  $\mathbb{P}(A | \bar{B}) = \mathbb{P}(A)$ . Finalement, si  $A$  et  $B$  sont indépendants, on a donc  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | \bar{B}) = \mathbb{P}(A | B)$  : le fait que  $B$  soit réalisé ou non ne change pas la probabilité que  $A$  le soit aussi.

**Exemple 18.** On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Montrer que les événements suivants sont indépendants :

$$A = \{\text{la carte est un as}\}$$

$$B = \{\text{la carte est un trèfle}\}$$



Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. Si on suppose  $A \cap B = \emptyset$  avec  $\mathbb{P}(A) > 0$  et  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$$

donc les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles mais ne sont pas indépendants. C'est assez naturel : si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, cela signifie que si l'un se produit, l'autre ne peut pas se produire. Il y a donc bien une dépendance entre ces événements.

### 3.2 Événements mutuellement indépendants

#### Définition 36.20

Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements de  $\Omega$ .

- $A_1, \dots, A_n$  sont dits indépendants 2 à 2 si pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  distincts, les événements  $A_i$  et  $A_j$  sont indépendants.
- $A_1, \dots, A_n$  sont dits (mutuellement) indépendants si pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

L'indépendance mutuelle est une condition plus "forte" que l'indépendance deux à deux.

**Exemple 19.** On lance une pièce deux fois. On pose les événements

$$A = \{\text{le premier lancer est pile}\}$$

$$B = \{\text{le deuxième lancer est pile}\}$$

$$C = \{\text{les deux lancers sont identiques}\}$$

Alors  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants deux à deux mais ne sont pas mutuellement indépendants.

## 4 Méthodes pour les exercices

### Méthode

Pour calculer  $\mathbb{P}(B | A)$  alors qu'on connaît  $\mathbb{P}(A | B)$ , on utilise la formule de Bayes (en général suivie de la formule des probabilités totales).

### Méthode

Pour calculer  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ , on peut :

- Si  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendants, calculer le produit  $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ .
- Sinon, calculer  $\mathbb{P}(A_1 | A_2)$  ou  $\mathbb{P}(A_2 | A_1)$  selon ce qui est le plus simple et conclure.

### Méthode

Pour calculer  $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$  où les évènements  $A_1, \dots, A_n$  ne sont pas indépendants et suivent un ordre "chronologique", on peut utiliser la formule des probabilités composées.