Chapitre 23

Polynômes (partie C) et fractions rationnelles

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Factorisation de polynômes

1.1 Polynôme scindé et forme factorisée

Définition 23.1 – Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1, càd s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distincts) et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X-\beta_k) = \lambda(X-\beta_1)(X-\beta_2)\cdots(X-\beta_n) \qquad (*)$$

Si de plus $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ sont deux à deux distincts, on dit que P est scindé à racines simples.

Remarque. La relation $*$ fournit une forme factorisée de P. Elle donne beaucoup d'informations sur P :

- Les nombres $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ constituent toutes les racines de P (mais il peut y avoir des doublons car $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ne sont pas nécessairement distincts).
- $\deg P = n$
- λ est le coefficient dominant de P : en effet cela découle du fait que $(X-\beta_1)(X-\beta_2)\cdots(X-\beta_n)$ est unitaire.

Dans la définition ci-dessus, les $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ne sont pas nécessairement distincts. On peut obtenir une écriture alternative en regroupant les $\beta_1, \cdots, \beta_n$ de même valeur. En notant $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ (avec $r \in \mathbb{N}$) les valeurs distinctes de la famille $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, on obtient :

Définition 23.2 – Polynôme scindé – bis

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il existe $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_r} = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\ldots(X-\alpha_r)^{m_r} \qquad (**)$$

De plus, P est scindé à racines simples si $m_1, \ldots, m_r$ valent 1.

Remarque. La relation $**$ est aussi une forme factorisée de P, et elle donne encore plus d'informations sur P :

- r est le nombre de racines *distinctes* de P.
- Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ constituent toutes les racines *distinctes* de P.
- $\deg P = m_1 + \ldots + m_r$
- λ est le coefficient dominant de P.

Comme le montrent les exemples ci-dessous, un polynôme peut être scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. S'il y a un risque d'ambiguité, il faut donc préciser.

Exemple 1.

1. Le polynôme nul n'est pas scindé. En effet les polynômes dans les membres de droite dans $*$ ou $**$ sont tous de degré positifs.
2. Si P est constant non nul, i.e. $P = a_0 \in \mathbb{K}^*$, alors il vérifie les définitions avec $\lambda = a_0$ et $n = r = 0$. Autrement dit tout polynôme constant non nul est scindé (sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$) à racines simples.

3. Tout polynôme de degré 1 est scindé (sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$) à racines simples : si $P = aX + b$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$, alors $P = \lambda\,(X - \beta)$ avec $\lambda =$ .... et $\beta =$ ....
4. Les polynômes suivants sont-ils scindés sur $\mathbb{R}$ et/ou sur $\mathbb{C}$? scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$ et/ou sur $\mathbb{C}$?

   (a) $P = 3X^3 - X^2$

   (b) $Q = X^2 + 1$

1.2 Calcul de la factorisation, en pratique

Étant donné un polynôme P, il n'y a pas de méthode directe qui permette de le mettre sous la forme $*$ ou $**$ (à supposer que cela soit possible, cf $Q = X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$). Le principe général est de trouver un maximum de racines possibles par divers procédés (racine évidente puis factorisation, résolution de l'équation $P(x) = 0$...). On a de plus le résultat suivant :

Théorème 23.3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.

1. Si P admet autant de racines *comptées avec multiplicité* que son degré, alors P est scindé.
2. Si P admet autant de racines (distinctes) que son degré, alors P est scindé à racines simples.

Ce résultat est même une équivalence, mais les sens réciproques sont évidents. Si on est dans le cas 1, on en déduit immédiatement la forme $**$ pour P. Si on est dans le cas 2, on en déduit immédiatement la forme $*$ pour P.

Démonstration. En effet, si on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines distinctes de P et $m_1, \cdots, m_r$ leurs multiplicités, on a vu que :

$$(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_r)^{m_r} \mid P$$

Or, le polynôme de gauche est de degré $m_1 + \ldots + m_r$, donc de même degré que P par hypothèse. Ainsi, les polynômes $(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_r)^{m_r}$ et P sont associés. On en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \qquad P = \lambda (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_r)^{m_r}$$

donc que P est scindé à racines simples.

La seconde assertion se montre de la même manière en considérant $\beta_1, \cdots, \beta_n$ les racines distinctes de P (avec $n = \deg P$). □

Le théorème ci-dessus permet notamment d'écrire un polynôme de degré n sous forme factorisée dès lors qu'on a trouvé n racines (comptées avec multiplicité).

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire qu'il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

1.3 Relations coefficients-racines

Rappel : pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les deux racines de } aX^2 + bX + c \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Pour un polynôme scindé, on peut généraliser ces relations entre coefficients et racines :

Théorème 23.4 – Relations coefficients-racines (ou formules de Viète)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ scindé, et $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ les racines de P (pas nécessairement distinctes). Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \beta_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Comme les $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ne sont pas forcément distincts, ces relations donnent la somme et le produit des racines *comptées autant de fois que leur multiplicité.*

Démonstration.

□

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Retrouver le produit et la somme des racines n-èmes de l'unité.

Remarque. La première de ces relations a déjà été vue (somme géométrique). La seconde peut également se démontrer en écrivant le produit $\exp\left(i\sum_{k=0}^{n}\frac{2k\pi}{n}\right)$.

2 Factorisation en produit de polynômes irréductibles

2.1 Polynômes irréductibles

Définition 23.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ s'il vérifie ces deux conditions :

- $\deg P \geqslant 1$
- Les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont :
  - les polynômes constants non nuls (i.e. de degré 0),
  - les polynômes de même degré que P (donc associés à P, i.e. de la forme λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$).

Cette notion dépend du corps $\mathbb{K}$ qu'on considère : un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas forcément sur $\mathbb{C}$. Cette définition est peu utilisée en pratique : on verra plus loin comment reconnaitre un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Théorème 23.6

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible sur $\mathbb{K}$.
2. Si $\deg P = 2$ et que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors P est irréductible dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. 1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1. Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur de P. On montre facilement qu'alors $0 \leq \deg B \leq \deg P$, d'où $\deg B \in \{0,1\}$. Ainsi, les seuls diviseurs de P sont les polynômes de degré 0 ou du même degré que P. Donc P est irréductible sur $\mathbb{K}$.

2. Supposons par l'absurde que P ne soit pas irréductible. Il admet un diviseur $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg B \neq 0$ et $\deg B \neq 2$ (car $\deg P = 2$). Ainsi, on montre facilement que $\deg B = 1$, donc que B est de la forme $\lambda(X-\beta)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\beta \in \mathbb{K}$. Or, $B \mid P$ entraine que $X - \beta \mid P$ donc que P admet $\beta \in \mathbb{K}$ comme racine. Contradiction. D'où P est irréductible.

$\square$

Exemple 4. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

$$P = X^2 + 1 \qquad Q = X^4 + 3X^2 + 2$$

Remarque. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ jouent un rôle similaire aux nombres premiers dans $\mathbb{N}$. De même que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers, on va montrer dans les sections suivantes que **tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ peut se factoriser comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.**

2.2 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 23.7 – Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Théorème 23.8

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Ce résultat est une bénédiction : on sait que tout polynôme complexe peut se mettre sous la forme $*$ ou encore $**$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré. Pour montrer la propriété pour tout polynôme non nul, il suffit de montrer qu'elle est vraie pour tout polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« Tout polynôme de degré } n \text{ est scindé sur } \mathbb{C} \text{ »}$$

- **Initialisation :** soit P un polynôme de degré $n = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda$. Ainsi, on peut écrire $P = \lambda = \lambda \prod_{k=1}^{n} (\cdots)$ avec $n = 0$. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$.
  D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, comme $\deg P \geq 1$, P admet une racine $\beta \in \mathbb{C}$. Donc $X - \beta$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \beta)Q$.
  On montre alors facilement que $\deg Q = \deg P - 1 = n$. Par hypothèse de récurrence, Q est scindé sur $\mathbb{C}$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ tels que $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$.
  Ainsi $P = \lambda(X - \beta) \prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$. D'où P s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1, donc P est scindé. Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

□

Corollaire 23.9 – Polynômes irréductibles et factorisation sur $\mathbb{C}[X]$

1. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont (exactement) les polynômes de degré 1.
2. Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ peut se factoriser en produit de polynômes irréductibles (donc de degré 1) sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines deux à deux distinctes de P, et $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.
Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration.
1. On a vu précédemment que tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Réciproquement, on affirme que tout polynôme de degré supérieur ou égal à 2 n'est pas irréductible. En effet, par le théorème de d'Alembert-Gauss, ce polynôme admet au moins une racine β et par conséquent n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$ (il est divisible par $X - \beta$).
2. Évident puisque P est scindé (c'est la forme $**$).

□

Exemple 5. Factoriser le polynôme $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

2.3 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 23.10

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si α est une racine complexe de $\mathbb{C}$, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité que α.

Démonstration. Tout d'abord, pour tous $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on affirme que $Q(\overline{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)}$. En effet, si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\overline{Q(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\overline{\alpha}^k = Q(\overline{\alpha})$$

En conséquence, comme P et ses dérivées successives sont à coefficients réels, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \quad & \iff \quad P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \\
& \iff \quad \overline{P(\alpha)} = \overline{P'(\alpha)} = \ldots = \overline{P^{(m-1)}(\alpha)} = 0 \text{ et } \overline{P^{(m)}(\alpha)} \neq 0 \\
& \iff \quad P(\overline{\alpha}) = P'(\overline{\alpha}) = \ldots = P^{(m-1)}(\overline{\alpha}) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\overline{\alpha}) \neq 0 \\
& \iff \quad \overline{\alpha} \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } m.
\end{aligned}$$

□

Théorème 23.11 – Polynômes irréductibles et factorisation sur $\mathbb{R}[X]$

1. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont (exactement) les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (discriminant strictement négatif).
2. Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} Q_j^{n_j}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ et :

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles de P, deux à deux distinctes,
- $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives,
- $Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle.
- $n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{N}^*$ jouent le rôle de "multiplicités" des $Q_1, \cdots, Q_s$

Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Dans la factorisation ci-dessus, on peut avoir $r = 0$ ou $s = 0$ (dans ce cas le produit correspondant vaut 1). Si $r = s = 0$, alors P est constant non nul.

Remarque. Cette écriture nous apprend beaucoup d'informations sur P : elles donnent les racines réelles distinctes de P, ainsi que leur nombre et leurs multiplicités (r et $m_1, \cdots, m_r$). Comme tous les polynômes dans les produits sont unitaires, λ est le coefficient dominant de P.

Démonstration. La preuve s'appuie sur la méthode ci-dessous : $\square$

Méthode

Pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$, on peut le factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les polynômes ayant des racines complexes conjuguées pour former des polynômes réels du second degré (sans racine réelle).

Exemple 6. Décomposer $X^5 + X$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2.4 Calcul de PGCD et de PPCM par la factorisation

On a vu que calculer les décompositions (dites généralisées) de deux entiers a et b permet de calculer entre autres $a \wedge b$ et $a \vee b$. Il en va de même pour les polynômes :

Définition 23.12 – Factorisation "généralisée"

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{K}$. Alors on peut écrire :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\alpha_P}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_P \in \mathbb{N}$ (notamment les exposants peuvent être nuls).

On parlera de factorisation "généralisée" de A. La notation $\mathbb{I}$ n'est pas du tout officielle ! Avec des polynômes unitaires, cette écriture est unique et on l'exposant α_P peut être vu comme la "valuation P-adique" du polynôme A. Mais c'est hors-programme.

Théorème 23.13

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, de factorisations généralisées :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\alpha_P} \qquad B = \mu \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\beta_P}$$

Alors, on peut déduire le PGCD et le PPCM de A et B :

$$A \wedge B = \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\min(\alpha_P, \beta_P)} \qquad \text{et} \qquad A \vee B = \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\max(\alpha_P, \beta_P)}$$

Exemple 7. Si $A = 2X^2(X-1)$ et $B = 3X(X-1)^2(X+1)$ alors

$$A \wedge B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad A \vee B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en déduit le résultat suivant, qui est très utile en pratique :

Théorème 23.14

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. $P \wedge Q = 1$ si et seulement si P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

$\square$

Pour appliquer ce résultat, il faut absolument regarder s'il y a une racine *complexe* commune : $P = (X^2+1)$ et $Q = (X^2+1)^2$ n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{R}$, mais on voit facilement que P et Q ne sont pas premiers entre eux (car $P \mid Q$). C'est cohérent avec la propriété ci-dessus, puisque P et Q ont au moins une racine commune dans $\mathbb{C}$ (plus précisément i et $-i$).

3 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts. Pour cette partie, on pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad L_i(X) := \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

Théorème 23.15

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Démonstration. Si $j = i$, alors $L_i(x_i) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq i}} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq i}} 1 = 1$.

Si ($n \geq 2$ et) $j \neq i$, alors $L_i(x_j) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq i}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \underbrace{\frac{x_j - x_j}{x_i - x_j}}_{=0} \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq i,\, k \neq j}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0$. □

Théorème 23.16 – Polynôme de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux.
- Soit $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques.

Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n-1$ dont la fonction polynômiale passe par les points $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, càd tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \qquad P(x_j) = y_j$$

Ce polynôme P est donné par :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \qquad \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

P est appelé le <u>polynôme d'interpolation de Lagrange</u> associé aux points $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$.

Démonstration. **Existence :** Soit P le polynôme défini ci-dessus. Comme $L_1, \cdots, L_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, par somme (et multiplication par les scalaires $y_1, \cdots, y_n$), on a $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{i,j} = y_j$$

Unicité : Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $P_1(x_j) = P_2(x_j) = y_j$. On a donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \qquad (P_1 - P_2)(x_j) = 0$$

Ainsi, le polynôme $P_1 - P_2$ admet donc n racines $x_1, \ldots, x_n$ et comme ce polynôme est de degré au plus $n-1$, il s'agit du polynôme nul : $P_1 - P_2 = 0$. Donc $P_1 = P_2$ et il y a unicité. □

Exemple 8. Le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points $(1, 2)$ et $(3, 5)$ est dans $\mathbb{K}_1[X]$, donc de la forme $aX + b$. Il s'agit en fait de la droite affine qui passe par ces deux points.

Exemple 9. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer un polynôme de degré au plus 2 qui passe par les trois points suivants :

$$(x_1, y_1) = (-1, a) \qquad (x_2, y_2) = (0, b) \qquad (x_3, y_3) = (1, c)$$

4 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

4.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Étant donnés deux polynômes A et B avec $B \neq 0$, on souhaite définir le quotient $\dfrac{A}{B}$. Si A est un multiple de B, i.e. $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, on pourrait poser $\dfrac{A}{B} := Q$. Mais dans le cas général, A n'est pas un multiple de B et il n'y a pas de moyen clair de définir cette fraction dans $\mathbb{K}[X]$. Il faut un ensemble "plus gros", qu'on va construire.

Comme les fractions d'entiers, si on veut définir un quotient $F = \dfrac{A}{B}$, on souhaite pouvoir "simplifier" par un même polynôme (non nul) au numérateur et au dénominateur. Cela entraine qu'une même fraction admet plusieurs écritures possibles :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{XA}{XB} = \frac{BA}{B^2}$$

Au final, cette propriété revient à ce que les fractions vérifient : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$.

Définition 23.17 – Fraction rationnelle

On admet l'existence d'un ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{A}{B} \;\middle|\; A, B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \neq 0 \right\}$$

dont les éléments vérifient

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

L'élément $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est appelé une <u>fraction rationnelle</u>.

Exemple 10.

- $\frac{X}{X^2}$ et $\frac{2}{2X}$ sont deux fractions rationnelles égales : ce sont deux écritures de la fraction $F = \frac{1}{X}$.
- $\frac{1}{4}$ et $\frac{0}{X}$ sont des fractions rationnelles.

Remarque. Pour tout polynôme P, on peut identifier P et $\frac{P}{1}$: on dira (abusivement) que tout polynôme est une fraction rationnelle, ou encore que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- En particulier, on note $0 = \frac{0}{1}$ la fraction rationnelle nulle. Elle a de nombreuses écritures : $0 = \frac{0}{X} = \frac{0}{5X^2}$...
- On a $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$.

4.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$

Définition 23.18

On définit deux l.c.i. $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} := \frac{AD + BC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} := \frac{AC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

- Puisque $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors $BD \neq 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Les fractions ci-dessus sont donc bien des éléments de $\mathbb{K}(X)$.
- Si $F, F' \in \mathbb{K}(X)$, alors on peut vérifier que $F + F'$ et FF' ne dépendent pas des écritures de F et de F'. Les lois $+$ et $\times$ sont ainsi bien définies.

Théorème 23.19

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Démonstration. Éléments de preuve :

1. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien :

(a) $+$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$.

(b) L'élément neutre pour $+$ est la fraction nulle $F = 0$.

(c) L'opposé (i.e. symétrique pour $+$) de $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$, qu'on peut donc aussi noter $-\frac{A}{B}$.

2. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps :

(a) $\times$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$, distributive sur $+$.

(b) L'élément neutre pour $\times$ est la fraction $F = 1$ (càd $\frac{1}{1}$, $\frac{X}{X}$, ou encore $\frac{B}{B}$ avec $B \neq 0$).

(c) Si $\frac{A}{B} \neq 0$, alors nécessairement $A \neq 0$ et on vérifie que $\frac{A}{B}$ admet pour inverse $\frac{B}{A} \in \mathbb{K}(X)$. Ainsi tout élément non nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible.

□

4.3 Fractions irréductibles et degré

Définition 23.20 – Fraction irréductible

Une fraction rationnelle est dite irréductible (ou sous forme irréductible) si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque. Toute fraction $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se réécrire sous forme irréductible en divisant numérateur et dénominateur par $A \wedge B$. En effet pour tout couple (A, B), on a vu qu'il existe $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}(X)$ telle que

$$A = (A \wedge B)A_1 \qquad \text{et} \qquad B = (A \wedge B)B_1 \qquad \text{et} \qquad A_1 \wedge B_1 = 1$$

Alors

$$\frac{A}{B} = \frac{(A \wedge B)A_1}{(A \wedge B)B_1} = \frac{A_1}{B_1}$$

et cette dernière fraction est bien irréductible.

Une fraction $\frac{A}{B}$ admet une infinité de formes irréductibles : si $\frac{A_1}{B_1}$ en est une, toutes les autres sont les fractions

Exemple 11. La fraction $\frac{X^3-1}{X^4-1}$ n'est pas irréductible car 1 est une racine commune à $X^3 - 1$ et $X^4 - 1$. De plus la factorisation en produits de polynômes irréductibles de $X^3 - 1$ et de $X^4 - 1$ donne :

On lit sur cette factorisation que $(X^3 - 1) \wedge (X^4 - 1) = X - 1$. Donc on peut se ramener à une fraction irréductible en simplifiant par le PGCD :

Définition – Degré

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de F par

$$\deg F := \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

- Comme $\deg A \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$ (car $B \neq 0$), on a bien $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
- Le degré de F ne dépend pas de son écriture : si on a $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$, alors comme $AD = BC$ on a

$$\deg A + \deg D = \deg B + \deg C$$

et donc, comme $\deg B, \deg D$ sont finis :

$$\deg A - \deg B = \deg C - \deg D \quad \Longrightarrow \quad \deg\left(\frac{A}{B}\right) = \deg\left(\frac{C}{D}\right)$$

Ainsi, on peut prendre n'importe quelle écriture pour calculer $\deg F$.
- Attention ! Si $\deg F = 0$, cela n'implique pas que F est égale à un élément $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Contre-exemple : $F = \dfrac{X+5}{2X-3}$.

Exemple 12. Le degré de $\dfrac{2X+1}{X^2}$ est ; Le degré de $\dfrac{(X-1)^2 - X^2}{X(1-X)}$ est

5 Fonctions rationnelles

Définition 23.21 – Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\dfrac{A}{B}$ pour forme ***irréductible***.

- On appelle racine de F toute racine de son numérateur. On définit la multiplicité de cette racine (en tant que racine de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine du numérateur.
- On appelle pôle de F toute racine de son dénominateur. On définit la multiplicité de cette racine (en tant que pôle de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine du dénominateur.

Exemple 13. Si $F = \dfrac{1}{(X-\alpha)^k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors α est un pôle de F de multiplicité k.

Exemple 14. Attention à bien mettre F sous forme irréductible. Si $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1}$, alors 1 n'est ni racine, ni pôle de F. En effet, sous forme irréductible,

$$F = \frac{X^2+X+1}{X+1}$$

si bien que F a pour unique pôle -1, et F n'a pas de racine réelle. Cependant, F admet deux racines complexes : $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2.

Dans la définition qui suit, on note $\widetilde{P}$ la fonction polynômiale associée à un polynôme P.

Définition 23.22 – Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\frac{A}{B}$ pour forme ***irréductible***. On appelle fonction rationnelle (associée à F) la fonction

$$\widetilde{F} : x \mapsto \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}$$

La fonction $\widetilde{F}$ est définie sur $\mathbb{K} \setminus \widetilde{B}^{-1}(\{0\})$, i.e. sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B (i.e. des pôles de F) et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Les deux définitions précédentes ne dépendent pas du choix de la forme irréductible de F (si $F = \frac{\lambda A}{\lambda B}$ alors on trouve les mêmes racines, pôles et fonction rationnelle $\widetilde{F}$).
- Cette définition de $\widetilde{F}$ est compatible avec les opérations $+, \lambda\bullet, \times$ de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}(X)$:

$$\widetilde{F+G} = \widetilde{F} + \widetilde{G} \qquad \widetilde{F \times G} = \widetilde{F} \times \widetilde{G} \qquad \widetilde{\lambda F} = \lambda \widetilde{F}$$

6 Décomposition en éléments simples (DES)

Pour intégrer l'expression $\frac{1}{1-x^2}$, on a vu la méthode suivante : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \ln|1-x|\right]_a^b$$

Le but de cette section (et du chapitre) est de donner une méthode pour décomposer une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ de la même façon, de sorte qu'on puisse l'étudier plus facilement car elle s'écrira comme une combinaison (linéaire) de fractions plus simples. Ce sera particulièrement utile pour réaliser des opérations linéaires : intégration, sommation, dérivation, etc.

Le calcul de la DES se fait en trois étapes : les étapes 2 et 3 varient selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6.1 DES partie 1 : calcul de la partie entière

Définition 23.23 – Étape 1 : partie entière + fraction de degré négatif

Toute fraction rationnelle $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se décomposer en :

$$\frac{A}{B} \quad = \quad E \quad + \quad \frac{R}{B}$$

avec

- $E \in \mathbb{K}[X]$ un *polynôme* appelé partie entière de $\frac{A}{B}$.
- $\frac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction de degré *strictement négatif* : $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$.

De plus le couple (E, R) associé à cette décomposition est unique.

Le couple (E,R) s'obtient en faisant la division euclidenne de A par B :

$$\begin{cases} A = BE + R \\ \deg R < \deg B \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{A}{B} = E + \dfrac{R}{B} \\ \deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0 \end{cases}$$

A noter : si $\deg\left(\dfrac{A}{B}\right) < 0$, alors la partie entière de $\dfrac{A}{B}$ est nulle et $R = A$. Cette étape n'est alors pas nécessaire.

La suite du calcul de la DES est toujours la même : on factorise le polynôme B, et cette factorisation permet de décomposer $\dfrac{R}{B}$ en une somme de fractions plus simples, dont il faut déterminer les numérateurs.

6.2 DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{C}$)

On suppose que $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$.

Remarque (Étape 2.$\mathbb{C}$: factorisation de B). Puisque le dénominateur B est un polynôme non nul de $\mathbb{C}\left[X\right]$, il est scindé et on détermine la factorisation de B sous la forme suivante :

$$B = \mu \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\mu \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$,$\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines distinctes de B et $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités. On notera que le cas $n = 0$ correspond à $B = \mu$, i.e. B constant non nul.

Théorème 23.24 – Étape 3.$\mathbb{C}$: DES sur $\mathbb{C}$

Soit $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$. Une fois B factorisé comme ci-dessus, il existe des éléments de $\mathbb{C}$ (un pour chaque $\bullet$ ci-dessous) telle que

$$\begin{aligned} \frac{R}{B} = \frac{R}{\mu \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}} &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^k} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_i} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_i)^{m_i}} \right) \\ &= \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_1} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_1)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_1)^{m_1}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_2} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_2)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_2)^{m_2}} \right) \\ &\qquad \vdots \\ &\quad + \left(\frac{\bullet}{X - \alpha_r} + \frac{\bullet}{(X - \alpha_r)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X - \alpha_r)^{m_r}} \right) \end{aligned}$$

On remarquera que la forme générale de la décomposition ne dépend ni de R, ni de μ. En réalité R et μ vont influencer les valeurs des $\bullet$ qu'on va trouver. Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 23.25 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors F admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F \quad = \quad E \quad + \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k}$$

où $E \in \mathbb{C}\left[X\right]$ est la partie entière de F, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les pôles distincts de F de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ et (c_{ik}) est une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.

Cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}) pour laquelle l'égalité est vérifiée.

Exemple 15. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les complexes • associés) :

- $F = \dfrac{7}{5X^3(2X-4i)} = \dots$

- $F = \dfrac{X^3 + iX^2}{(X-i)^2(X+1)^2X} = \dots$

Si $F = \dfrac{A}{1} \in \mathbb{K}\left[X\right]$, alors la décomposition en éléments simples de F est juste $F = F + 0$: la partie entière est $E = F$ et, puisque $B = 1$ est constant, on a $n = 0$, si bien que la somme double est nulle.

6.3 DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{R}$)

On suppose que $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{R}(X)$.

Remarque (Étape 2.$\mathbb{R}$: décomposition de B en produit de polynômes irréductibles). Puisque le dénominateur B est un polynôme non nul de $\mathbb{R}\left[X\right]$, on détermine la factorisation de B sous la forme suivante :

$$B = \mu \left(\prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i} \right) \prod_{j=1}^{s} Q_j^{n_j}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, $r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles distinctes de B, $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives, $Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{R}\left[X\right]$ des polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle et $n_1, \cdots, n_s$ leurs “multiplicités”.

Théorème 23.26 – Étape 3.$\mathbb{R}$: éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$. Une fois B factorisé comme ci-dessus, il existe des éléments de $\mathbb{R}$ (un pour chaque $\bullet$ ci-dessous) telles que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{B} = \frac{R}{\mu\left(\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)\prod_{j=1}^{s}Q_j^{n_j}} &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\bullet}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{\bullet X+\bullet}{(Q_j)^k} \\
&= \left(\frac{\bullet}{X-\alpha_1} + \frac{\bullet}{(X-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X-\alpha_1)^{m_1}}\right) \\
&\qquad\vdots \\
&+ \left(\frac{\bullet}{X-\alpha_r} + \frac{\bullet}{(X-\alpha_r)^2} + \ldots + \frac{\bullet}{(X-\alpha_r)^{m_r}}\right) \\
&+ \left(\frac{\bullet X+\bullet}{Q_1} + \frac{\bullet X+\bullet}{Q_1^2} + \ldots + \frac{\bullet X+\bullet}{Q_1^{n_1}}\right) \\
&\qquad\vdots \\
&+ \left(\frac{\bullet X+\bullet}{Q_s} + \frac{\bullet X+\bullet}{Q_s^2} + \ldots + \frac{\bullet X+\bullet}{Q_s^{n_s}}\right)
\end{aligned}$$

Là encore, la forme générale de la décomposition ne dépend ni de R, ni de μ. Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 23.27 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Alors F admet une <u>décomposition en éléments simples</u> sur $\mathbb{R}$:

$$F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{a_{jk}X+b_{jk}}{(Q_j)^k}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est la partie entière de F, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les pôles réels distincts de F de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$, $Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ les polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle qui composent le dénominateur de F, et (c_{ik}), (a_{jk}) et (b_{jk}) des familles de réels.

De plus cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}), une seule famille (a_{jk}) et une seule famille (b_{jk}) pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Exemple 16. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les réels $\bullet$ associés) :

- $F = \dfrac{1}{(X^2+1)^2X} = \ldots$

- $F = \dfrac{X^3+X^2+X+1}{(X^2+4)(X-4)^2} = \ldots$

6.4 Le déroulé de chaque étape

Méthode – Décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction qu'on veut décomposer en éléments simples.

1. On fait la division euclidienne de A par B et on divise tout par B : on obtient :
$$\frac{A}{B} = E + \frac{R}{B} \qquad \text{avec} \qquad E \in \mathbb{K}[X], \qquad \deg R < \deg B$$
On a ainsi déterminé la partie entière E. Dans la suite, on s'intéresse uniquement à $\dfrac{R}{B}$.
2. On factorise B en produit de polynômes irréductibles : la forme peut varier selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Une fois B factorisé, on connait la forme de la DES de F et on détermine les coefficients au numérateur (chaque $\bullet$ dans les propriétés plus haut) par diverses techniques, cf plus bas.

La décomposition en éléments simples de la fraction F est alors :
$$\frac{A}{B} \quad = \quad E \quad + \quad \left[\text{"décomposition de } \frac{R}{B} \text{ déterminée à l'étape 3"}\right]$$

Pour l'étape 3, tout se fait **au brouillon** : sur la copie, **on n'écrit que la décomposition finale**. Une fois la forme de la DES écrite au brouillon, on peut utiliser toute une ribambelle d'astuces et de techniques : les exemples et les exercices sont le meilleur moyen de les comprendre. Voici une liste non exhaustive :

Méthode – Déterminer les coefficients à l'étape 3

- "**Grande puissance**" : pour chaque pôle α_i de multiplicité m_i, multiplier par $(X-\alpha_i)^{m_i}$ puis remplacer X par α_i partout.
- "**Passage à la limite**" : multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$ pour en déduire une relation.
- "**Parité**" : si la fraction $G := \dfrac{R}{B}$ est paire, on peut comparer les décompositions de $G(-X)$ et de $G(X)$ et égaliser deux à deux les coefficients qui ont le même dénominateur. Idem si G est impaire en comparant $G(-X)$ et $-G(X)$.
- "**Évaluation**" : on peut évaluer toute l'expression en un point précis de $\mathbb{K}$ et en déduire une relation.
- "**Grande puissance, racine imaginaire**" : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour chaque terme $\dfrac{aX+b}{Q_j^{n_j}}$, on peut multiplier par $Q_j^{n_j}$ partout et prendre $X = \omega$ avec ω une racine complexe (inconnue) de Q. Il n'est pas nécessaire de calculer ω : on peut uniquement utiliser le fait que $Q(\omega) = 0$ pour s'en sortir.
- "**Pôle simple**" : si α est un pôle simple, i.e. $B = \mu(X-\alpha)Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, le coefficient de $\dfrac{\bullet}{X-\alpha}$ est égal à $\dfrac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$.[1]

1. Ce coefficient est aussi égal à $\dfrac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$ par la méthode "Grande puissance", mais il arrive que $\dfrac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$ soit plus facile à calculer.

Démonstration. Prouvons la méthode “Pôle simple”. Si α est un pôle simple de la fraction, alors $B = (X-\alpha)Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. Dans ce cas, $B' = Q + (X-\alpha)Q'$. On remarque alors que $B'(\alpha) = Q(\alpha)$. Ainsi, le coefficient à trouver pour $\frac{\bullet}{X-\alpha}$ vaut $\frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$ mais aussi $\frac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$. □

Exemple 17. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{A}{B} := \frac{2X^7 + 2X^5 - 10X^3 + 6X + 16}{X^6 + X^4 - 5X^2 + 3}$$

(Étape 1) On remarque que $A = 2XB + 16$. Ainsi,

$$\frac{A}{B} \quad = \quad 2X \quad + \quad \frac{16}{B}$$

Comme $2X$ est un polynôme et que $\frac{16}{B}$ est de degré strictement négatif, on a terminé l'étape 1. La partie entière est $2X$ (on aurait aussi pu faire une division euclidienne classique). Dans la suite, on ne s'intéresse donc qu'à la fraction $\frac{16}{B}$.

(Étape 2) On factorise $B = X^6 + X^4 - 5X^2 + 3$ en produit de polynômes irréductibles.

(Étape 3) On cherche une décomposition de la fraction $G := \frac{16}{B}$. La forme générale est :

Bonus : argument de parité

- On aurait aussi pu utiliser un argument de parité : on remarque que $G(X) = G(-X)$ donc par unicité ces deux fractions ont nécessairement la même décomposition. Or,

$$\begin{aligned} G(-X) &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e(-X)+f}{(-X)^2+3} \\ &= \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{-eX+f}{X^2+3} \end{aligned}$$

tandis que

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+3}$$

Si on compare les deux écritures, on peut alors identifier les coefficients qui ont le même dénominateur :

$$\begin{cases} a = -c \\ b = d \\ c = -a \\ d = b \\ eX + f = e(-X) + f \end{cases} \qquad \begin{cases} a + c = 0 \\ b = d \\ e = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi trois équations en un coup.

Méthode

Pour factoriser un polynôme $P \in \mathbb{K}\left[X\right]$, on peut :

- Trouver une racine évidente $\alpha \in \mathbb{K}$ et factoriser P par $X - \alpha$.
- Si $\deg P = 2$, utiliser le discriminant.
- Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, factoriser P dans $\mathbb{C}$ puis regrouper les polynômes ayant des racines complexes conjuguées.
- Si $\deg P = n$ et qu'on a trouvé n racines comptées avec multiplicité, en déduire la factorisation de P.

Méthode

Soit $A, B \in \mathbb{K}\left[X\right]$. Pour calculer $A \wedge B$, on peut :

- Utiliser l'algorithme d'Euclide.
- Si on pense que $A \wedge B = 1$, utiliser toutes les méthodes du chapitre précédent.
- Factoriser A et B en produit de polynômes irréductibles et en déduire $A \wedge B$ (et aussi $A \vee B$).

Une fois $A \wedge B$ calculé, on peut déduire $A \vee B$ par la propriété bien connue (cf section PPCM du chapitre précédent).

Méthode

Pour calculer une DES, se référer à la méthode et l'exemple de la section précédente.