Chapitre 19
Matrices

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices et opérations matricielles

1.1 Définitions et notations

Définition 19.1

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Une telle matrice est dite de taille (n, p).

On représente une matrice de taille (n, p) par un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, a_{ij} est appelé coefficient d'indice (i,j) : c'est le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et j-ième colonne. Étant donné une matrice X, on peut aussi noter X_{ij} ou encore $\left[X\right]_{ij}$ le coefficient d'indice (i,j) de X.

Comme pour les suites qu'on note (u_n) et non $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les valeurs n, p, on pourra noter $A = (a_{ij})$ ou encore $A = (A_{ij})$ sans préciser les valeurs possibles prises par i et j (il suffit par exemple de préciser "$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$" au préalable).

Il y a ambiguité sur la notation : l'expression "a_{123}" peut désigner a_{ij} pour $(i,j) = (12,3)$ ou $(i,j) = (1,23)$. En pratique, cela ne pose que *très* rarement problème. Si c'est le cas, on pourra noter $a_{i,j}$ plutôt que a_{ij}, de sorte qu'on distingue bien $a_{12,3}$ et $a_{1,23}$.

Définition 19.2 – Matrices de formes particulières

- Toute matrice n'ayant qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$$
- Toute matrice n'ayant qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
- Une matrice avec n lignes et n colonnes est appelée matrice carrée (de taille n). C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On note
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

Remarque. Contrairement à la notation a_{ij}, pour l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la virgule est obligatoire : $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille (np, np) !

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \ldots\ldots\ldots$$

Exemple 2. La matrice nulle de taille (n,p) :

$$0_{n,p} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

La matrice identité de taille n :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Définition 19.3

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites égales et on note $A = B$ si tous leurs coefficients sont égaux. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 19.4 – Lois + et $\lambda\cdot$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$A + B := (A_{ij} + B_{ij})$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda A := (\lambda A_{ij})$$

Autrement dit, $\left[A+B\right]_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ et $\left[\lambda A\right]_{ij} = \lambda A_{ij}$. L'addition et la multiplication par un scalaire s'effectuent donc "coefficient par coefficient" ou encore "terme à terme" :

Exemple 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $0A = 0_{n,p}$ et $1A = A$.

Théorème 19.5

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

Démonstration. On vérifie toutes les assertions de la définition. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $+$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: en effet, comme pour tous indices $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A_{ij} + B_{ij} \in \mathbb{K}$. Finalement $A + B = (A_{ij} + B_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. $+$ est associative sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car $+$ l'est sur $\mathbb{K}$:
$$(A+B)+C = \left(\left[A+B\right]_{ij} + C_{ij}\right) = \left((A_{ij}+B_{ij}) + C_{ij}\right) = \left(A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij})\right) = A + (B+C)$$
3. $+$ est commutative sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car $+$ l'est sur $\mathbb{K}$:
$$A + B = \left(A_{ij} + B_{ij}\right) = \left(B_{ij} + A_{ij}\right) = B + A$$
4. La matrice nulle $0_{n,p}$ vérifie
$$A + 0_{n,p} = \left(A_{ij} + 0\right) = (A_{ij}) = A$$
et comme on a montré que $+$ est commutative, on a automatiquement $0_{n,p} + A = A$. Ainsi, $0_{n,p}$ est élément neutre pour $+$.

5. Enfin,
$$A+(-A) = \left(A_{ij}+(-A_{ij})\right) = 0_{n,p}$$
et par commutativité on a aussi $(-A)+A = 0_{n,p}$. Ainsi, la matrice $-A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le symétrique de A pour $+$.

□

Remarque. Attention ! On ne peut pas additionner des matrices de tailles différentes. L'opération $A+B$ n'a de sens que si A, B ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

1.3 Produit matriciel

Définition 19.6 – Produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{\boxed{n,p}}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{\boxed{p,q}}(\mathbb{K})$.
On définit le produit de A et B comme étant la matrice $C \in \mathcal{M}_{\boxed{n,q}}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \qquad C_{ij} := \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}$$

On notera $C = A \times B$ ou encore $C = AB$.

Remarque. Le produit AB n'a donc un sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (ici p). En particulier, il est possible que le produit AB ait un sens, mais pas le produit BA.

Méthode

Pour calculer un produit AB, on peut disposer les matrices A et B de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & q \text{ colonnes} \\ \boxed{p}\ \text{lignes} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \boxed{p}\ \text{colonnes} \\ n \text{ lignes} & \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Le coefficient c_{ij} s'obtient à partir de la i-ième ligne de A et la j-ième colonne de B, en calculant une somme de produits :
$$c_{ij} \;=\; a_{i1} \times b_{1j} \;+\; a_{i2} \times b_{2j} \;+\; \ldots \;+\; a_{ip} \times b_{pj}$$

Exemple 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Cet exemple montre qu'en général $AB \neq BA$ (ces deux matrices peuvent même être de tailles différentes). On peut aussi écrire un produit en disposant les matrices de manière “naturelle” :

Exemple 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Le produit $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ a un sens mais...

Le produit $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens car ....

Théorème 19.7 – “Associativité” du produit

Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)C = A(BC)$$

□

Théorème 19.8 – Bilinéarité du produit

Soit A, B, C trois matrices. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, lorsque les opérations ci-dessous ont un sens :

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

En particulier, $\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$.

1.4 Matrices élémentaires

Notation. Pour tous entiers i, j, on définit le symbole de Kronecker par : $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 19.9

Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On définit la matrice élémentaire $E^{k\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ), qui vaut 1.

Ainsi, $E^{k\ell}$ est la matrice avec un 1 à l'intersection de la ligne k et de la colonne ℓ, et 0 ailleurs :

$$E^{k\ell} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{0} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & \mathbf{0} & \end{array}\right) & \text{(ligne } k\text{)} \\ \text{(col. } \ell\text{)} & \end{array}$$

Dit autrement :

$$\left[E^{k\ell}\right]_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque couple (k, ℓ) donne une matrice $E^{k\ell}$ différente : comme il y a np couples (car $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq \ell \leq p$), il y a donc np matrices élémentaires dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 7. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, il y a 6 matrices élémentaires :

$$E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. La notation $E^{k\ell}$ n'est pas officielle. Certains auteurs utilisent plutôt $E_{k,\ell}$ ou encore $E(k, \ell)$.

Théorème 19.10

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $j,k \in [\![1,p]\!]$ et $\ell \in [\![1,q]\!]$. On considère les matrices élémentaires $E^{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E^{k\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{jk}E^{i\ell} = \begin{cases} E^{i\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

.

Démonstration. Soit $u \in [\![1,n]\!]$ et $w \in [\![1,q]\!]$. Il suffit de montrer que $\left[E^{ij}E^{k\ell}\right]_{uw} = \left[\delta_{jk}E^{i\ell}\right]_{uw}$.

□

2 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

Soit $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le produit AB a un sens. Ainsi, $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va montrer que la loi $\times$ va lui conférer une structure d'anneau que n'ont pas les espaces $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$.

2.1 Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le but de cette partie est de montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. Il faut donc montrer que :

1. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un monoide.
3. $\times$ est distributive sur $+$.

On a déjà montré à la propriété 19.5 que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien. De plus, la distributivité de $\times$ sur $+$ est une conséquence de la propriété 19.8 avec $\lambda=\mu=1$. Il reste donc à montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un monoïde.

- On a vu que le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est toujours bien défini. Ainsi, la loi $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- De plus, par la propriété 19.7 avec $(p,q,r)=(n,n,n)$, la loi $\times$ est associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Enfin, la propriété suivante montre que la matrice identité I_n est élément neutre de $\times$:

Théorème 19.11

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $AI_n=I_nA=A$.

□

On a donc montré que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un monoide.

Théorème 19.12

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. Il est non commutatif si $n\geq 2$.

Démonstration. On a vu plus haut que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. Il reste à montrer la non commutativité. On pose

$$A=\begin{pmatrix} & & 2 \\ & \mathbf{0} & \\ 1 & & \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad B=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \mathbf{0} & \\ 1 & & \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Alors

$$AB= \qquad\qquad BA=$$

On en déduit donc que $AB\neq BA$. □

Remarque. L'application

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(\mathbb{K})&\to\mathbb{K}\\(a)&\mapsto a\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. On peut alors identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$. En particulier, $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est commutatif.

2.2 Matrices carrées de forme particulière

Définition 19.13 – Matrice scalaire

On appelle matrice scalaire une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $n \in \mathbb{N}^*$).

Notation. Pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on note

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \mathbf{0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Définition 19.14 – Matrice diagonale

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est (une matrice) diagonale s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

Autrement dit, $A = (a_{ij})$ est diagonale si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

Remarque. La forme générale d'une matrice diagonale est donc

$$\begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & * \end{pmatrix}$$

où chaque symbole $*$ peut être remplacé par une valeur quelconque dans $\mathbb{K}$ (pas forcément la même). Nous allons utiliser ce formalisme régulièrement dans la suite pour présenter les définitions.

Exemple 8. Les matrices suivantes sont diagonales :

$$0_{n,n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & n \end{pmatrix} \qquad I_n$$

Exemple 9. Toute matrice scalaire est diagonale. La réciproque est fausse si $n \geq 2$.

Remarque. Si $A = (a_{ij})$, on appelle diagonale de A tous les coefficients a_{ii} avec $1 \leq i \leq n$. Cette notion existe même si A n'est pas une matrice diagonale. Par exemple la diagonale de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est constituée des coefficients 1 et 4.

Théorème 19.15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est une matrice diagonale. De plus, A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut vérifier (avec la formule du produit) que :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_n\alpha_n \end{pmatrix}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\alpha_i\beta_i = \beta_i\alpha_i$ car $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ et la multiplication est commutative sur $\mathbb{K}$. D'où $AB = BA$. $\square$

Définition 19.16 – Matrice triangulaire

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire supérieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & \huge{*} \\ & * & \\ & & \ddots & \\ \huge{0} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad i > j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire inférieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & \huge{0} \\ & * & \\ & & \ddots & \\ \huge{*} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad i < j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire</u> si A est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

Notation. On note

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires de taille n.

Exemple 10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire .... $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire ....

Exemple 11. Une matrice est triangulaire supérieure ***et*** inférieure si et seulement si elle est diagonale. Autrement dit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 19.17

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

De plus, on peut vérifier que quand on fait le produit de deux matrices triangulaires supérieures, les diagonales se multiplient terme à terme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & * \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & * \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

Idem pour le produit de deux matrices triangulaires inférieures :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & 0 \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

2.3 Puissances de matrice

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit AA a un sens.

Définition 19.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la puissance k-ième de A par : $\quad A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k \text{ fois}}$

Par convention, $A^0 = I_n$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ étant un anneau, A^k correspond à l'itéré k-ième de A pour la loi $\times$.

Les matrices carrées sont les seules matrices qu'on peut élever à la puissance. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$, alors A^k n'a de sens que si $k = 1$ (et écrire A^1 est maladroit...).

Exemple 12. Si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, alors $A^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \cdots, \alpha_n^k)$.

Exemple 13. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$. Ainsi, si $k \geq 2$, $\quad A^k = A^2 A^{k-2} = 0_{2,2} A^{k-2} = 0_{2,2}$.
En particulier, A est un diviseur de zéro dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est donc **pas intègre** (et de même pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$).

Théorème 19.19 – Calcul dans un anneau – version $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{AB = BA} \implies (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$\boxed{AB = BA} \implies A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$$

Exemple 14. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la puissance m-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4 Inverse d'une matrice

Définition 19.20 – Matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n$$

Il n'y a alors qu'une seule matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant cette assertion et on note $A^{-1} := B$. La matrice A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n. Cet ensemble est appelé le groupe linéaire.

Autrement dit, A est inversible si elle est symétrisable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A^{-1} est son (unique) symétrique pour la loi $\times$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif (sauf si $n = 1$), il faudrait en théorie vérifier que $AB = I_n$ et $BA = I_n$ pour la même matrice B avant de conclure que A est inversible. Mais $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est particulier :

Théorème 19.21 – Être inversible "d'un seul côté" suffit pour être inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n \qquad$ (càd A est inversible)
2. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad BA = I_n$
3. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = I_n$

Démonstration. Admis pour le moment. □

Exemple 15. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $B = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$, on vérifie que $AB = I_2$. Ainsi, A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exemple 16. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $D = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$, on vérifie que $CD = I_2$. Ainsi, C est inversible et $D = C^{-1}$.

Exemple 17. La matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $X^2 = 0_{2,2}$. Ainsi, X n'est pas inversible. En effet, si X était inversible,

$$X^{-2}X^2 = X^{-2}0_{2,2} = 0_{2,2} \qquad \text{et} \qquad X^{-2}X^2 = X^{-2+2} = X^0 = I_2$$

et donc $I_2 = 0_{2,2}$ ce qui serait absurde.
Note : le même argument fonctionne dans un anneau A quelconque : un diviseur de zéro n'est jamais inversible.
Comme $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a immédiatement :

Théorème 19.22

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe. En particulier, pour toutes matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$:

- $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (A^{-1})^{-1} = A$.
- $AB \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \quad A^k \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k =: A^{-k}$

3 Transposition

3.1 Définition et propriétés

Définition 19.23 – Matrice transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle (matrice) transposée de A, la matrice (notée) $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \qquad \left[A^\top\right]_{ij} = A_{ji}$$

En d'autres termes, $A^\top$ est obtenu à partir de A en faisant la "symétrie" de A par rapport à sa "diagonale".

Exemple 18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

Exemple 19. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \qquad\qquad .$

Théorème 19.24

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $(A^\top)^\top = A$.
2. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.

□

Théorème 19.25

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

$\square$

Théorème 19.26

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

$\square$

3.2 Matrices carrées symétriques et antisymétriques

Définition 19.27 – Matrice symétrique

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si $\quad A^\top = A \quad$ càd si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} = a_{ji}$.
- On dit que A est antisymétrique si $\quad A^\top = -A \quad$ càd si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} = -a_{ji}$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n. Ces deux notions n'ont de sens que pour une matrice carrée : si A n'est pas carrée, alors A et $A^\top$ n'ont pas la même taille et ne peuvent donc pas être égales.

Exemple 20. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique car $A^\top = A$.

Exemple 21. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique car $A^\top = \qquad\qquad = -A$.

Théorème 19.28

Si une matrice A est antisymétrique, alors les coefficients sur sa diagonale sont nuls.

$\square$

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut :

- Calculer quelques puissances pour conjecturer une formule, puis la montrer par récurrence.
- Exprimer A comme la somme de deux matrices qui commutent et utiliser la formule du binôme.
- D'autres méthodes seront possibles plus tard...

Méthode

Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, on peut :

- Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ **ou** $BA = I_n$
- D'autres méthodes seront possibles plus tard...