Chapitre 7

Généralités sur les fonctions

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, D et D' sont supposés être des parties non vides de $\mathbb{R}$.

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions *réelles de la variable réelle* (càd de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Dans certaines sections on considérera aussi des fonctions *complexes de la variable réelle* (càd de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

Définition 7.1 – Définition "intuitive"

Une fonction (réelle de la variable réelle) est un objet qui à tout réel x associe une expression $f(x) \in \mathbb{R}$ *à condition que $f(x)$ ait un sens.* On la définit au moyen de la notation :

$$f : x \mapsto f(x)$$

- L'ensemble de définition de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x tels que le réel $f(x)$ a un sens.

Une fois D_f déterminé, on obtient une *application* :

$$\begin{aligned} f : D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

En particulier, f hérite de toutes les notions inhérentes aux applications : antécédent, image, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, restriction, etc.

Exemple 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto x^x$.
Réponse : c'est compliqué... d'où la remarque suivante.

Remarque. Il arrive qu'on souhaite définir une fonction f sur un sous-ensemble $D \subset D_f$, donc on notera :

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas D est l'ensemble de départ de f (D_f étant son ensemble de définition). Rappel : on note $\mathscr{F}(D,\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.2

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $X \subset D$. On dit que f vérifie une "propriété" $\mathfrak{P}$ sur X si la fonction $f|_X$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Exemple 2.

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $f|_{\mathbb{R}_+}$ l'est) et décroissante sur $\mathbb{R}_-$ (car $f|_{\mathbb{R}_-}$ l'est).
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est majorée par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Par convention, on exclut de la définition précédente la continuité et la dérivabilité : on donnera un autre sens à "f est continue sur $\mathbb{R}_+$" ou "f est dérivable sur $\big[-1,1\big]$".

Graphe. Rappel : le graphe de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Pour une fonction réelle de la variable réelle, on peut représenter graphiquement Γ_f dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan : c'est l'ensemble des points $(x, f(x))$ lorsque x parcourt D. La courbe reliant ces points est la courbe représentative de f et est notée $\mathscr{C}_f$.

1.2 Parité et périodicité

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 si

$$\forall x \in D \qquad -x \in D$$

Définition 7.3 – Fonction paire, impaire

Soit D une partie symétrique par rapport à 0 et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. f est dite paire si :
$$\forall x \in D \qquad f(-x) = f(x).$$
2. f est dite impaire si :
$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x).$$

Exemple 3. La fonction $x \mapsto x^n$ est paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair).

Remarque.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est paire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Dans les deux cas, la connaissance du graphe sur $D \cap \mathbb{R}_-$ permet de déduire le graphe sur $D \cap \mathbb{R}_+$ et réciproquement.

Théorème 7.4

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire et si $0 \in D$, alors $f(0) = 0$.

Définition 7.5 – Fonction périodique

Soit $T > 0$. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique lorsque :

$$\forall x \in D \qquad \begin{cases} x + T \in D \\ x - T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

On dit également que T est une période de f.

Si T est une période de f alors il en va de même pour $2T$, $3T$, etc. On considère en général la plus petite période possible.

Remarque. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors le graphe de f est invariant par des translations successives de vecteur $T\overrightarrow{i}$ et $-T\overrightarrow{i}$. Ainsi, la connaissance du graphe sur $D \cap [0, T]$ permet de déduire le graphe entier.

Exemple 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Alors la fonction $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique.

1.3 Transformations et symétries du graphe

Théorème 7.6 – Effet sur le graphe d'opérations simples

Connaissant la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut obtenir celle des fonctions suivantes (avec $a \in \mathbb{R}$) :

$$x \mapsto f(x)+a \qquad x \mapsto f(-x) \qquad x \mapsto f(ax)$$
$$x \mapsto f(x+a) \qquad x \mapsto -f(x)$$

et leurs combinaisons. Voir le script suivant : https://www.desmos.com/calculator/ieurh6nsr2

Exemple 5.

- La courbe de $x \mapsto f(x)+a$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La courbe de $x \mapsto f(x-a)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i}$.

1.4 Opérations sur $\mathbb{R}^D$

Définition 7.7 – Opérations sur les fonctions

Soit $f, g \in \mathscr{F}(D,\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit de nouvelles fonctions de $\mathscr{F}(D,\mathbb{R})$ notées :

$$f+g : x \mapsto f(x)+g(x) \qquad f-g : x \mapsto f(x)-g(x)$$
$$fg : x \mapsto f(x)\times g(x) \qquad f^n : x \mapsto f(x)^n$$
$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x) \qquad |f| : x \mapsto |f(x)|$$

et enfin, si g ne s'annule pas sur D, on peut définir également :

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \qquad g^{-n} : x \mapsto \frac{1}{g(x)^n}$$

Exemple 6. $\cos^2 + \sin^2 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ $\qquad$ $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ $\qquad$ $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ $\qquad$ (où on sous-entend $D = D_{\tan}$)

Définition 7.8

Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$.

- On écrira $f \leq g$ si $\quad \forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$ $\qquad$ (idem pour $f \geq g$)
- On écrira $f < g$ si $\quad \forall x \in D \quad f(x) < g(x)$ $\qquad$ (idem pour $f > g$)

Remarque. Attention, la négation de "$f \leq g$" n'est pas "$f > g$". En réalité, on a :

$$\text{non}(f \leq g) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 7.

- On montre facilement que $\cos \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$.
- Les assertions "$\cos \leq \sin$" et "$\sin \leq \cos$" sont toutes les deux fausses.

Définition 7.9 – Composée de fonctions

Soit f, g deux fonctions. On définit la fonction composée de g et f par $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.
L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donné par

$$D_{g\circ f} := \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\} = f^{-1}(D_g)$$

Bien entendu, si f, g sont restreintes à des ensembles $D \subset D_f$ et $D' \subset D_g$, alors il faut adapter la définition ci-dessus. $g \circ f$ sera définie sur D si et seulement si $f(D) \subset D'$.

Exemple 8. Déterminer l'ensemble de définition de f donnée par $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$.

1.5 Sens de variation

Définition 7.10 – Sens de variation

Soit $f \in \mathbb{R}^D$. On dit que...

- f est croissante si $\qquad \forall x, y \in D \qquad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est décroissante si $\qquad \forall x, y \in D \qquad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est monotone si elle est croissante ou décroissante.
- f est strictement croissante si $\qquad \forall x, y \in D \qquad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est strictement décroissante si $\qquad \forall x, y \in D \qquad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- f est constante si $\qquad \exists C \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in D \qquad f(x) = C$

Mentionnons aussi une définition équivalente de “f est constante” : $\qquad \forall x_1, x_2 \in D \qquad f(x_1) = f(x_2)$.

Remarque.

- f est (strictement) croissante si et seulement si $-f$ est (strictement) décroissante.
- f est croissante et décroissante si et seulement si f est constante.
- Pour montrer (par exemple) que f n'est pas croissante, il suffit de montrer la négation de “f est croissante” :

$$f \text{ n'est pas croissante} \quad \iff \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 9. Montrer que $f : x \mapsto |\ln x|$ n'est pas croissante.

Exemple 10. La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle décroissante ?

Théorème 7.11 – Opérations et monotonie

Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$.

1. Si f, g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et si f est croissante, alors λf est croissante.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et si f est croissante, alors λf est décroissante.
4. Si f, g sont *positives* et croissantes, alors fg est croissante.

Démonstration. Montrons les assertions 1, 2 et 4. Soit $x, y \in D$ tels que $x \leq y$. Comme f et g sont croissantes, on a

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ g(x) \leq g(y) \end{cases}$$

□

Théorème 7.12 – Composée de fonctions monotones

Soit f, g deux fonctions monotones. Alors $g \circ f$ est monotone. Plus précisément :

- Si f, g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f, g sont de monotonies différentes, alors $g \circ f$ est décroissante.

Si de plus f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est strictement monotone.

Démonstration. On ne prouve que la deuxième assertion dans le cas f croissante et g décroissante (les autres cas étant similaires). Montrons ainsi que $g \circ f$ est décroissante.

□

Remarque. Il n'est pas toujours nécessaire de dériver pour trouver un sens de variation !

Exemple 11. Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sans dériver :

- $f : x \mapsto (6x + e^x)^3$ est .... sur $\mathbb{R}$ car ...
- $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est .... sur $\mathbb{R}_+$ car ...

1.6 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 7.13 – Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Étant donné $M \in \mathbb{R}$, on dit que f est majorée par M si : $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$.
2. Étant donné $m \in \mathbb{R}$, on dit que f est minorée par m si : $\forall x \in D \quad f(x) \geq m$.
3. On dit que f est majorée s'il existe un réel M tel que f est majorée par M, càd
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$$
4. On dit que f est minorée s'il existe un réel m tel que f est minorée par m, càd :
$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$$
5. On dit que f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

On dit également que M est un majorant de f et que m est un minorant de f.

Théorème 7.14

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

$$f \text{ est bornée} \iff |f| \text{ est majorée} \iff \exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in D \qquad |f(x)| \leq K$$

Le réel K ne doit pas dépendre de x ! Souvent, un tel réel K se trouve a posteriori, après avoir majoré $|f(x)|$ pour tout x dans D.

Exemple 12. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{3 + \cos x} - \dfrac{1}{x+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 7.15

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

1. f est dite positive si elle est minorée par 0. On notera $f \geq 0$.
2. f est dite négative si elle est majorée par 0. On notera $f \leq 0$.
3. f est dite strictement positive, et on notera $f > 0$, si $\quad \forall x \in D \quad f(x) > 0$.
4. f est dite strictement négative, et on notera $f < 0$, si $\quad \forall x \in D \quad f(x) < 0$.

Remarque. Les notations ci-dessus sont fréquemment utilisées, mais il y a un léger abus de notation : dans l'assertion "$f \geq 0$", on a noté "0" pour signifier en réalité la fonction nulle $x \in D \mapsto 0$, mais le symbole "0" désigne déjà le réel zéro. En réalité, la fonction nulle définie sur D se noterait plutôt $0 \times \mathbb{1}_D$ ou encore $0_{\mathbb{R}^D}$, mais c'est plus lourd et donc moins usité.

Définition 7.16 – $f \equiv 0$, notation semi-officielle

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

- f est dite identiquement nulle, et on notera $f \equiv 0$, si f est égale (en tout point de D) à la fonction nulle, donc si : $\quad \forall x \in D \qquad f(x) = 0$
- Dans le cas contraire, on notera $f \not\equiv 0$, ce qui équivaut à : $\quad \exists x \in D \qquad f(x) \neq 0$

Remarque. Ainsi, on évitera d'écrire "$f = 0$" et "$f \neq 0$". La notation "$f = 0$" en soi n'est pas tant un problème, certains auteurs s'en servent à la place de "$f \equiv 0$". En revanche, la notation "$f \neq 0$" est ambigüe et peut se comprendre de deux manières :

1. Si on suit la logique des assertions $f \geq 0$, $f > 0$, $f = 0$, alors $f \neq 0$ se traduirait par : $\forall x \in D \qquad f(x) \neq 0$
2. Mais $f \neq 0$ pourrait être vu comme la négation de $f = 0$, auquel cas on traduirait par : $\exists x \in D \qquad f(x) \neq 0$

Ces deux assertions n'ont rien à voir ! Dans le premier cas, cela signifie "f ne s'annule jamais". Dans le second, cela signifie "f n'est pas identiquement nulle". Pour éviter toute confusion, on évitera donc d'écrire "$f = 0$" et surtout "$f \neq 0$".

1.7 Maximum, minimum

Définition 7.17

Soit $f \in \mathbb{R}^D$ et $a \in D$. On dit que :

- f admet un maximum **en** a lorsque : $\forall x \in D \qquad f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum **en** a lorsque : $\forall x \in D \qquad f(x) \geq f(a)$.
- f admet un extremum **en** a lorsque f admet un maximum ou un minimum en a.

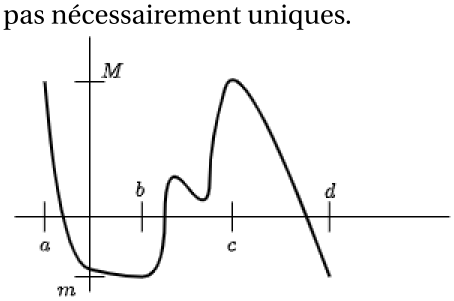
On distinguera bien :

- **Le** maximum de f qui est la valeur maximale que prend f, qui est donc unique.
- Le(s) point(s) **en lequel** f atteint ce maximum, qui ne sont pas nécessairement uniques.

Soit f la fonction représentée par la courbe ci-contre.

Le maximum de f est M, il est atteint en les points a et c.

Le minimum de f est m, il est atteint en les points b et d.



Exemple 13. **Le** maximum de la fonction cos est 1 ; ce maximum est atteint **en** les points ...
Le minimum de la fonction cos est -1 ; ce minimum est atteint **en** les points ...

Notation. Lorsque f admet un maximum sur D, la valeur de ce maximum est notée :

$$\max_{x \in D} f(x) \qquad \text{ou encore} \qquad \max_D f$$

Lorsque f admet un minimum sur D, la valeur de ce minimum est notée :

$$\min_{x \in D} f(x) \qquad \text{ou encore} \qquad \min_D f$$

Exemple 14. La fonction $g : x \mapsto \ln x$ n'admet ni maximum, ni minimum. En revanche, sur $\left[1, 2\right]$, on a :

$$\max_{x \in \left[1,2\right]} g(x) = g(2) = \ln 2 \qquad\qquad \min_{x \in \left[1,2\right]} g(x) = g(1) = 0$$

Méthode

Pour trouver un extremum, on peut faire un tableau de variation.

1.8 Asymptotes

Pour ce chapitre, la notion de limite reste "intuitive", comme en terminale. Elle sera précisée ultérieurement.

Définition 7.18 – Asymptote

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$
on dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.

- S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$
on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

On adapte naturellement la définition ci-dessus pour une asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple 15. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ admet $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que l'asymptote $x = 1$ comme asymptote verticale.

2 Notions intuitives de continuité et de dérivation

Hypothèse

Dans toute la suite, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux (i.e. non vides et non singletons).

2.1 Continuité

Définition 7.19 – Continuité ponctuelle

Soit f une fonction et $a \in D_f$. On dit que f est continue en a si
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Une limite peut également s'écrire avec une flèche : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Ne pas mélanger les deux écritures !

Pour que f soit continue en a, il faut que f soit définie en a (sinon écrire $f(a)$ ci-dessus n'aurait pas de sens).

Exemple 16.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 (et même en tout point de $\mathbb{R}$).
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0.

Définition 7.20 – Continuité globale

Soit f une fonction et $A \subset D_f$.

- On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.
- On dit que f est continue (sans préciser d'ensemble) si f est continue en tout point de D_f.

Exemple 17. Toute fonction polynôme est continue (sur $\mathbb{R}$).

Remarque. Attention, “f est continue sur A” ne signifie pas la même chose que $f\big|_A$ est continue ! Par exemple, en posant $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ alors :

- La fonction f n'est pas continue sur $\left[0,1\right[$ car f n'est pas continue en 0.
- Pourtant, $f\big|_{\left[0,1\right[}$ est continue car $f\big|_{\left[0,1\right[} \equiv 0$.

2.2 Dérivation

Définition 7.21 – Dérivabilité ponctuelle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On définit le taux d'accroissement de f en a comme étant la fonction

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

- On dit que f est dérivable en a lorsque $\tau_a(x)$ admet une limite *finie* quand x tend vers a. Dans ce cas, on note :

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

  et on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

Quand on cherche une limite, trois cas sont possibles :

1. La limite n'existe pas (par exemple $\sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$). Dans ce cas on ne peut pas écrire “lim” : $\cancel{\lim_{x \to +\infty} \sin x}$
2. La limite existe et est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) : on peut écrire $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
3. La limite existe et est finie (i.e. appartient à $\mathbb{R}$). C'est seulement dans ce cas que f est dérivable en a. On peut alors écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemple 18. Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Définition 7.22 – Dérivabilité globale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $J \subset I$. On dit que f est dérivable sur J lorsque f est dérivable en tout point de J. On appelle alors fonction dérivée de f, l'application notée :

$$\begin{aligned} f' : J &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

- On dit que f est dérivable (sans préciser d'ensemble) si f est dérivable en tout point de I.

L'ensemble des points où f est dérivable est appelé ensemble de dérivabilité de f.

Exemple 19. Soit $f : x \mapsto x|x|$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

2.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 7.23 – Opérations sur les dérivées

Soit $u, v \in \mathbb{R}^I$ deux fonctions dérivables (sur I). Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. (Linéarité de la dérivation) La fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable, et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$.
2. uv est dérivable, et $(uv)' = u'v + v'u$.
3. Si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable, et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
4. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, u^n est dérivable, et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, avec la convention $u^0 : x \mapsto 1$.
   (Si $n < 0$, il faut que u ne s'annule pas sur I)

Démonstration. Par la définition (ou récurrence pour 5). Montrons par exemple l'assertion 3. Pour tout $a \in I$,

$$\frac{\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(a)}}{x-a} = \frac{\frac{u(a)-u(x)}{u(x)u(a)}}{x-a} = \frac{-1}{u(x)u(a)} \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{-1}{u(a)^2} \times u'(a)$$

Ainsi, $\frac{1}{u}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{u}\right)'(a) = -\frac{u'(a)}{u(a)^2}$. Donc par arbitraire sur a, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$. □

Théorème 7.24 – Dérivée d'une composée

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in I$.
Si f est dérivable en a, et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

Plus généralement, si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Démonstration. Admis pour le moment (nécessite la composition des limites). □

Méthode – La phrase magique

Pour justifier qu'une fonction est dérivable, on pourra utiliser le fait que :

- La somme ou la différence de fonctions dérivables est dérivable.
- Le produit ou le quotient de fonctions dérivables est dérivable.
- La composée de fonctions dérivables est dérivable.
- Toute fonction polynôme est dérivable.
- Toute fonction rationnelle est dérivable (en les points où elle est définie).
- Les fonctions "usuelles" suivantes sont dérivables (en les points où elles sont définies) :

$$\cos \quad \sin \quad \tan \quad \exp \quad \ln \quad \mathrm{ch} \quad \mathrm{sh} \quad \mathrm{th} \quad \arctan$$

  (les fonctions ch, sh, th, arctan seront vues plus loin)

Démonstration. Cela découle des propriétés ci-dessus. □

Attention, les fonctions suivantes ne sont pas dérivables :

$$x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto |x| \qquad \arccos \qquad \arcsin$$

Il faut connaitre l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction et établir la dérivabilité au cas par cas.

Exemple 20. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\cos\left(\exp\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right)\right)$. Alors f est dérivable (en tout point où elle est définie) comme composée et quotient de fonctions dérivables.

Exemple 21. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

Remarque. On note parfois $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f. En effet, $x \in D_{f'}$ si et seulement si $f'(x)$ est bien défini et a un sens. Attention toutefois : **l'ensemble $D_{f'}$ ne se détermine pas à partir de l'expression** $f'(x)$. Dans l'exemple précédent, lorsque $x \neq 0$, on a obtenu une expression de $f'(x)$ qui, a priori, n'était pas définie en 0. Pourtant, on a montré que f est bien dérivable en 0, donc $0 \in D_{f'}$.

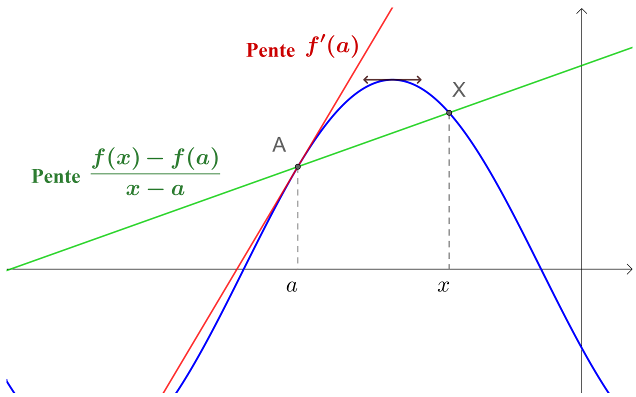
2.4 Dérivée et tangente à $\mathscr{C}_f$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la droite qui relie les points $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$. Quand x tend vers a, si f est dérivable en a, cette pente tend vers $f'(a)$ qui correspond à la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point a.

Théorème 7.25

Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. La courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente (non verticale) d'équation :

$$T : \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



En particulier, si $f'(a)=0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x=a$ est horizontale. On le représente sur la courbe par une double flèche $\leftrightarrow$ comme ci-dessus (ou, si a est un bord de I, une demi-flèche $\rightarrow$ ou $\leftarrow$).

2.5 Dérivée et sens de variation

Théorème 7.26 – Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Démonstration. Admis pour le moment □

Remarque. Il est indispensable, pour appliquer ce résultat, que I soit un **intervalle**. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f' < 0$, mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

On notera que la dernière assertion n'est pas une équivalence, mais une simple implication. La réciproque de cette implication est fausse : par exemple $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive : elle s'annule en 0. On verra une réciproque complète dans un chapitre ultérieur.

2.6 Étude de fonction

Méthode – Plan d'étude d'une fonction f

1. Recherche de l'ensemble de définition D_f.
2. Étude de la périodicité *puis* de la parité, ce qui permet de restreindre le domaine d'étude à un ensemble $D \subset D_f$.
3. Étude des variations de f sur D, avec éventuellement : dérivabilité, calcul de f', tableau de variations de f. Préciser (dans le tableau le cas échéant) les limites aux bords de D.
4. (Optionnel) Pour certains points particuliers $x \in D$, calcul de $f(x)$ et/ou de l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x.
5. Tracé de la courbe pour $x \in D$, en s'aidant des points particuliers, des asymptotes, des tangentes, etc.

Exemple 22. Étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$.

Remarque. La fonction g de cet exemple n'est pas égale à la fonction cotangente. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, et donc cotan est par exemple défini en $\dfrac{\pi}{2}$, avec $\operatorname{cotan}\dfrac{\pi}{2} = 0$, alors que g ne l'est pas.

3 Fonction à valeurs complexes

Dans cette section on considère des fonctions *complexes à variable réelle*, càd des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 7.27

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathrm{Im} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Noter que ce sont des fonctions de $\mathbb{R}^D$ alors que $f \in \mathbb{C}^D$.

Définition 7.28

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est <u>dérivable</u> lorsque $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont. On définit alors la <u>fonction dérivée</u> de f comme étant :

$$f' := (\mathrm{Re} f)' + i\,(\mathrm{Im} f)'$$

Théorème 7.29 – Dérivation dans $\mathbb{C}^D$

Soit $u, v : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I. Les résultats des propriétés 7.23 et 7.24 sont encore vrais dans ce cadre (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$).

Au final, tout se passe comme si i était une constante quelconque.

Exemple 23. Dériver la fonction $f(x) = (1 + ix)^6 + e^{ix^2}$.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode – Dériver une fonction f proprement

1. Déterminer son ensemble de définition D_f.

2. Si f peut s'écrire comme une somme, produit, composée, etc. de fonctions dérivables :
   (a) Écrire la “phrase magique” pour justifier que f est dérivable (sur D_f).
   (b) Appliquer les formules usuelles de dérivation pour calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

3. Sinon, l'expression de $f(x)$ contient des fonctions non dérivables, typiquement des expressions de la forme $\sqrt{u(x)}$ ou $|v(x)|$:
   (a) Identifier clairement où les problèmes de dérivation sont susceptibles d'arriver[2]. Déterminer les valeurs de x telles qu'on évite tous les problèmes. Ces valeurs “gentilles” forment un ensemble $D \subset D_f$.
   (b) Pour tout $x \in D$, calculer $f'(x)$ en appliquant les formules usuelles de dérivation.
   (c) Pour chaque valeur $x_0 \in D_f \setminus D$, vérifier au cas par cas si f est dérivable en x_0 :
      - On peut regarder si le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite *finie* lorsque x tend vers x_0.
      - On peut aussi appliquer le théorème de la limite de la dérivée, qu'on verra dans un chapitre ultérieur.

Attention ! On ne doit sous aucun prétexte écrire “ $f(x)'$ ” sur une copie ! Banissez les $(e^x)'$, ou encore les $(x^2)'$. En effet, le $'$ de dérivation s'applique toujours sur une fonction et non sur les réels comme e^x ou x^2.

Toutefois, cette notation est quand même bien pratique... au brouillon !

2. Pour $\sqrt{u(x)}$, un problème peut arriver lorsque $u(x) = 0$. Pour $|v(x)|$, un problème peut arriver lorsque $v(x) = 0$.