Chapitre 6

Applications

Plan du chapitre

Hypothèse

E, F, G, H, E', F' sont des ensembles quelconques.

1 Application

1.1 Définitions et notations

Définition 6.1 – Définition “intuitive” d'application

On dit que f est une application de E dans F, si à chaque élément x de E, f associe un unique élément de F, noté $f(x)$:

$$\text{"} \quad \forall x \in E \quad \exists! y \in F \qquad y = f(x) \quad \text{"}$$

- E est appelé l'ensemble de départ de f.
- F est appelé l'ensemble d'arrivée de f.
- Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image par f de x et que x est UN antécédent de y par f.
- On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Pour une même valeur de y, il peut y avoir plusieurs antécédents par f. Par exemple pour l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, le réel 4 a deux antécédents par f.

Notation. On note “$f : E \to F$” pour indiquer que f est une application ayant respectivement E et F comme ensembles de départ et d'arrivée. Cela entraine que f est définie sur E tout entier.

On peut ensuite préciser “$x \mapsto f(x)$” juste en dessous, cf exemple 1.

1.2 Applications bien définies

Pour pouvoir écrire “$f : E \to F$”, il faut s'assurer que l'application f soit bien définie de E dans F. Il faut que, pour ***chaque*** élément $x \in E$:

1. $f(x)$ ait un sens.
2. $f(x)$ appartienne à F.
3. $f(x)$ soit défini de manière unique.

Exemple 1. Parmi les applications suivantes, entourez celles qui sont bien définies.

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{l} [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \text{"L'unique solution positive de } x^2 = a\text{"} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \text{"idem que } f_4\text{"} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ a \mapsto \text{"idem que } f_4\text{"} \end{array}$$

Notation. La notation de l'exemple 1 ci-dessus est la plus répandue, mais il existe des variantes, par exemple

$$f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto \dots \end{cases} \qquad \begin{array}{c} f : x \in E \mapsto \dots \\ (F \text{ est sous-entendu}) \end{array} \qquad \begin{array}{c} f : x \mapsto \dots \\ (E \text{ et } F \text{ sont sous-entendus}) \end{array}$$

La notation $x \mapsto \dots$ est très utilisée pour les fonctions réelles de la variable réelle, auquel cas on sous-entend que $E = D_f$ (ensemble de définition de f) et $F = \mathbb{R}$, cf chapitre suivant.

Définition 6.2

Soit $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si

$$E = E' \qquad \text{et} \qquad F = F' \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \qquad f(x) = g(x)$$

Ainsi, pour que deux applications soient égales, il faut qu'elles aient les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et qu'elles prennent les mêmes valeurs en chaque élément de l'ensemble de départ.

Exemple 2. Dans l'exemple 1, les applications f_1 et f_5 sont égales.

1.3 Prolongement, restriction

Définition 6.3 – Restriction et prolongement

Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle restriction de f à A, notée $f\big|_A$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f\big|_A : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- On dit qu'une application g est un prolongement de f si f est une restriction de g.

Pour tout $x \in A$, on a toujours $f\big|_A(x) = f(x)$. Pour autant, $f \neq f\big|_A$ a priori : ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de départ (sauf si $A = E$).

Exemple 3.

1. L'application f_3 dans l'exemple 1 est la restriction à $\left[1, +\infty\right[$ de l'application f_1 (mais pas de f_2 car l'ensemble d'arrivée n'est pas le même).
2. L'application

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est un prolongement de l'application “signe” définie par $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{x}{|x|}$.

Définition 6.4 – Corestriction (Semi-officiel)

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subset F$. On appelle corestriction de f à B, parfois notée $f\big|^B$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f\big|^B : E &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

À noter : pour que $f\big|^B$ soit bien définie, il faut s'assurer que pour tout $x \in E$, on a bien $f(x) \in B$.

Exemple 4. L'application f_2 dans l'exemple 1 est la co-restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de l'application f_1 : cependant, on a vu qu'elle n'était pas bien définie car $f_2(0) = \sqrt{0} = 0 \notin \mathbb{R}_+^*$. En revanche, la corestriction de f_1 à $\mathbb{R}_+$ est bien définie : c'est l'application

$$\begin{aligned} f_1\big|^{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

1.4 Exemples d'applications

Exemple 5. Pour tout ensemble E, on définit l'application identité de E par :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Exemple 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On peut la considérer comme une application $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

Exemple 7. Soit I et E deux ensembles quelconques et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On peut considérer cette famille comme une application $a \in E^I$:

$$\begin{aligned} a : I &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Exemple 8. Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application indicatrice sur A par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 9. Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Alors

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

ce qui revient à dire que :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$$

Définition 6.5

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle graphe de f, qu'on notera [1] Γ_f le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \,\middle|\, x \in E \right\}$$

Le graphe de f est donc l'ensemble des points situés sur la courbe représentative de f.

2 Images directe et réciproque

2.1 Image directe

Définition 6.6 – Image directe

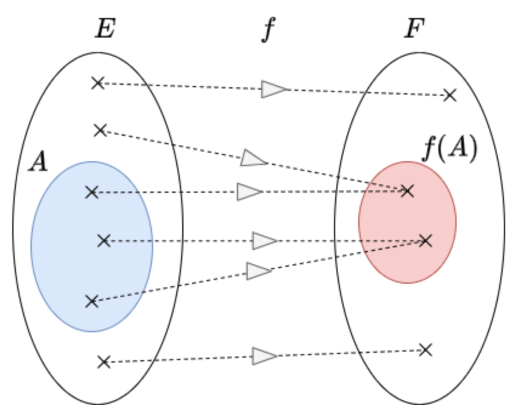
Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. L'image directe de A par f est l'ensemble des images par f de tous les éléments de A. On la note :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad \subset F$$

Si $x \in E$ et $A \subset E$, on prendra garde au fait que $f(x)$ est un *élément* de F (on écrira $f(x) \in F$), mais que $f(A)$ est un *sous-ensemble* de F (on écrira $f(A) \subset F$).

Exemple 10. Soit [2] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Si $A = \{0, 3, 5\}$, alors $f(A) = \{0, 9, 25\}$.
- Si $A = \left[-2, 1\right]$, alors $f(A) = \left[0, 4\right]$.
- $f(\mathbb{R}) = \left[0, +\infty\right[$.



Dans la plupart des cas, on attend une preuve rigoureuse de ce que vaut $f(A)$. La caractérisation ci-dessous s'avère alors très utile :

Théorème 6.7 (Caractérisation de $y \in f(A)$)

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Pour tout $y \in F$,

Exemple 11. On pose $f : x \mapsto x^2$ et $A = \left[-2, 1\right]$ On reprend les notations de l'exemple 10. Montrer que $f(A) = \left[0, 4\right]$.

Définition 6.8

Soit $f : E \to E$ une application et $A \subset E$. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$.

2.2 Image réciproque

Définition 6.9 – Image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B, notée

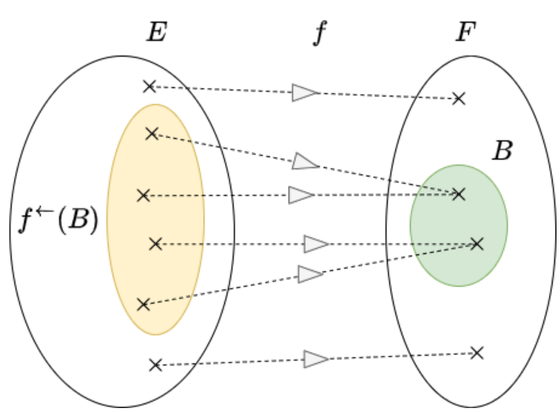
$$f^{\leftarrow}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \subset E$$

Dit autrement, c'est l'ensemble des éléments x de E qui sont envoyés dans B par f. Attention, $f^{\leftarrow}(B)$ est un sous-ensemble de E.

Remarque. La notation $f^{\leftarrow}(B)$ sera plus tard remplacée par une autre. On l'introduit ici pour éviter des confusions.

Exemple 12. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.

- Si $B = \{4\}$, alors $f^{\leftarrow}(B) = \{-2, 2\}$.
- Si $B = \mathbb{R}_-^*$, alors $f^{\leftarrow}(B) = \varnothing$.
- Si $B = [4, 9]$, alors $f^{\leftarrow}(B) = [-3, -2] \cup [2, 3]$



Pour montrer rigoureusement ce qu'est $f^{\leftarrow}(B)$, la caractérisation ci-dessous s'avère également très utile :

Théorème 6.10 (Caractérisation de $x \in f^{\leftarrow}(B)$)

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. Pour tout $x \in E$,

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la définition ou la caractérisation de l'image réciproque est très facile à utiliser.

Exemple 13. Soit $f : x \mapsto x^2$ et $B =]4, 9[$. Montrer que $f^{\leftarrow}(B) =]-3, -2[\cup]2, 3[$.

2.3 Propriétés des images directe et réciproque

Théorème 6.11 (Propriétés des images directes et réciproques)

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$.

1. L'inclusion est conservée quand on applique f ou $f^{\leftarrow}$:
   (a) $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
   (b) $B \subset B' \implies f^{\leftarrow}(B) \subset f^{\leftarrow}(B')$
2. Les opérations f et $f^{\leftarrow}$ se distribuent sur $\cup$:
   (a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
   (b) $f^{\leftarrow}(B \cup B') = f^{\leftarrow}(B) \cup f^{\leftarrow}(B')$
3. L'opération $f^{\leftarrow}$ se distribue sur $\cap$, mais pas f :
   (a) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (attention ce n'est qu'une inclusion !)
   (b) $f^{\leftarrow}(B \cap B') = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(B') =$

Démonstration.

- Maintenant, montrons 3) a). Soit $A, A' \subset E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap A') &\iff \exists x \in A \cap A' \quad y = f(x) \\ &\implies \exists x \in A \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in A' \quad y = f(x') \qquad (*) \\ &\iff y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in f(A') \\ &\iff y \in f(A) \cap f(A') \end{aligned}$$

  D'où par arbitraire sur y, on a $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

  Note : la ligne $(*)$ n'est pas équivalente à la ligne qui lui précède. En effet si on suppose $(*)$ on a a priori $x \neq x'$ *et donc on ne peut pas en déduire que y est l'image d'un élément de $A \cap A'$. C'est pour ça qu'on n'a qu'une inclusion et qu'en général $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Contre-exemple :*

$$A = \{0\} \qquad A' = \{1\} \qquad f : x \in \{0,1\} \mapsto 0$$

  alors $f(A) = f(A') = \{0\}$ et $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$.

$\square$

3 Composition d'applications

Définition 6.12 – Composition

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On appelle composée de g et f, notée $g \circ f$, l'application de $\mathscr{F}(E,G)$ définie par :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple 14. ◦ Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^{2p} \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2p}} = \sqrt[2p]{x} \end{aligned}$ Alors $\begin{aligned} g \circ f : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} f \circ g : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned}$

◦ Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

Remarque (Non commutativité de $\circ$)**.** On a en général $g \circ f \neq f \circ g$, comme le montre l'exemple ci-dessus.

Remarque. Pour que l'application $g \circ f$ soit bien définie, il suffit en fait que $g(f(x))$ ait un sens pour tout x dans E. En particulier, il suffit que g soit définie sur $f(E) = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$, et non sur F tout entier. De manière équivalente, il suffit qu'on puisse co-restreindre f de sorte que son ensemble d'arrivée soit inclus dans l'ensemble de départ de g.

Exemple 15. On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

L'application $g \circ f$ n'aurait techniquement pas de sens selon la définition 6.12, mais dans les faits, cela ne pose pas de problème car $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 6.13 ("Associativité" de la composition)

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$, $h \in \mathscr{F}(G,H)$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Démonstration. Les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont toutes deux des éléments de $\mathscr{F}(E,H)$, donc ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée. Enfin, pour tout $x \in E$, on a :

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$$

Ainsi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

Remarque. Cette propriété d'associativité permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté. C'est la même situation que les opérations $\cup$, $\cap$, "et", "ou" qui sont, elles aussi, associatives.

4 Injection, surjection, bijection

4.1 Injection

Définition 6.14 – Injection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une injection (ou que f est injective) lorsque tout élément y de F admet **au plus un antécédent** par f :

De manière équivalente, f est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **au plus / au maximum** une solution (dans E). Il y a donc *unicité* d'une éventuelle solution.

C'est bien ce que traduit la définition. Si x et x' sont deux solutions quelconques de $f(x) = y$, alors on a $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$: les deux solutions x et x' qu'on avait prises au départ étaient en fait la même. C'est cela, l'unicité (cf chapitre 0).

Méthode

- Pour montrer que f est injective, on montre qu'elle vérifie la définition ci-dessus, avec la rédaction appropriée.
- Pour montrer que f n'est PAS injective, il suffit de montrer la négation, donc de trouver x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.

Exemple 16.

- Soit $f : \boxed{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f est injective.
- Soit $f : \boxed{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$.
- Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective.

4.2 Surjection

Définition 6.15 – Surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une surjection (ou qu'elle est surjective) lorsque tout élément y de F admet **au moins un antécédent** par f :

Ainsi, f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **au moins / au minimum** une solution (dans E). Il y a donc *existence* d'une solution.

Méthode

- Pour montrer que f est surjective, on montre qu'elle vérifie la définition ci-dessus, avec la rédaction appropriée.
- Pour montrer que f n'est PAS surjective, il suffit de montrer la négation, donc de trouver un élément y de F qui n'a pas d'antécédent par f, càd tel que : $\forall x \in E \quad y \neq f(x)$.

Exemple 17.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}_+}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f est surjective.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent par f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2 \neq -1$.
- Pour tout ensemble E, l'application id_E est surjective.

4.3 Bijection

Définition 6.16 – Bijection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une bijection (ou qu'elle est bijective) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément y de F admet **exactement un antécédent** par f :

Ainsi, f est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **exactement une / une et une seule** solution (dans E).

Méthode

- Pour montrer que f est bijective, on peut montrer que f est injective ET surjective.
- On peut aussi résoudre, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ et montrer que la solution existe et est unique.
- Pour montrer que f n'est PAS bijective, on peut montrer que f n'est pas injective OU que f n'est pas surjective.

Exemple 18.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$. Montrons que f est bijective.
- Pour tout ensemble E, l'identité id_E est bijective.

Remarque (***jectivité dépend des ensembles de départ et d'arrivée)**.** Ci-dessous on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. Selon les ensembles de départ et d'arrivée de f, déterminer s'il s'agit d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection.

$f : x \mapsto x^2$	Injection	Surjection	Bijection
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$			
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$			
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$			

En termes de rédaction, on peut lever les éventuels doutes en précisant "f est une injection / surjection / bijection de E sur F".

4.4 Propriétés des ***jections

Théorème 6.17

Soit $f : E \to F$ une application. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Démonstration. Par définition, on a toujours $f(E) \subset F$. Ainsi, il suffit de montrer que f est surjective si et seulement si $F \subset f(E)$.

$$\begin{aligned} F \subset f(E) &\iff \forall y \in F \qquad y \in f(E) \\ &\iff \forall y \in F \qquad \exists x \in E \qquad y = f(x) \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

□

On peut donner des caractérisations similaires pour l'injectivité et la bijectivité, mais elles sont moins utiles :

- f est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{\leftarrow}(\{y\})$ possède au plus un élément.
- f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est un singleton.

Théorème 6.18 (*jection et composition)**

- La composée d'applications injectives est injective.
- La composée d'applications surjectives est surjective.
- La composée d'applications bijectives est bijective.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

□

4.5 Application réciproque

Rappel : si $f : E \to F$ est bijective, alors pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Définition 6.19 – Application réciproque

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors on peut définir une application $f^{-1} : F \to E$, qui à chaque $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On appelle cette application la réciproque de f. On a ainsi

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$$

Exemple 19.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$. Alors f est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Théorème 6.20

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Démonstration. Implication directe : il suffit d'appliquer f^{-1}. Implication réciproque : il suffit d'appliquer f. □

Théorème 6.21

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Alors f est bijective et on a $g = f^{-1}$ (en particulier cette application g est unique).

Démonstration. Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $x \in E$ qui vérifie $y = f(x)$. En appliquant la fonction g, on en déduit que
$$g(y) = g(f(x)) = x \qquad \text{car } g \circ f = \mathrm{id}_E$$
Ainsi, on a nécessairement $x = g(y)$.
- Synthèse : on vérifie que $x = g(y)$ est bien solution. En appliquant f, on en déduit que
$$f(x) = f(g(y)) = y \qquad \text{car } f \circ g = \mathrm{id}_F$$
De plus, on a bien $g(y) \in E$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{g(y)\}$.

Il existe donc une unique solution dans E à l'équation $f(x) = y$. Ainsi, f est bijective. Or, cela signifie que l'unique solution de $f(x) = y$ est $f^{-1}(y)$. On en déduit que $f^{-1}(y) = g(y)$. Par arbitraire sur y, cela entraine que $g = f^{-1}$. Il n'y a donc bien qu'une seule application g qui peut vérifier cette hypothèse : il s'agit de f^{-1}. □

Remarque. Dans le cas où $f : E \to E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on a donc $f^{-1} = f$. On dit alors que f est une involution sur E.

Exemple 20.
- L'application id_E est une involution sur E.
- Les applications $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont des involutions sur $\mathbb{C}$. Elles sont donc bijectives et sont leur propre application réciproque.

4.6 Propriétés de l'application réciproque

Théorème 6.22

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors :

1. L'application $f^{-1} : F \to E$ est également bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. L'application $g \circ f : E \to G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

1. Comme f est une bijection, on a
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$
On peut ainsi appliquer la Propriété 6.21 à l'application f^{-1} (en prenant $g = f$) : on déduit que f^{-1} est bijective et que l'application réciproque de f^{-1} est f. D'où le résultat.
2. L'application $f^{-1} \circ g^{-1}$ a bien un sens. Or, par associativité,
$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \mathrm{id}_E\end{aligned}$$
et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$. Donc par la proposition 6.21 appliquée à $g \circ f$, l'application $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Remarque. Soit $f : E \to F$ une application bijective et $B \subset F$. Alors l'image directe de B par f^{-1} est égal à l'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = f^{\leftarrow}(B)$$

Notation. Désormais, pour toute fonction f, **même non bijective**, on notera

$$\boxed{f^{-1}(B) := f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

En particulier, **si f n'est pas bijective** :

- on ne peut pas écrire $f^{-1}(y)$ avec $y \in F$ car l'application f^{-1} n'est pas définie.
- **cependant, l'ensemble $f^{-1}(B)$ a toujours un sens, et on peut l'écrire.**

5 Transformations du plan complexe

Définition 6.23

On appelle <u>transformation du plan (complexe)</u> toute bijection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Il existe énormément de transformations du plan complexe. On expose ici quelques transformations remarquables.

5.1 Translations

Définition 6.24 – Translations

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe b. Alors, la <u>translation de vecteur $\overrightarrow{u}$</u> est l'application définie par :

$$\begin{aligned} \tau_b : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + b \end{aligned}$$

Théorème 6.25

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe b. Alors, la translation τ_b est une transformation (i.e. τ_b est bijective) et son inverse est la translation τ_{-b} :

$$\begin{aligned} \tau_{-b} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z - b \end{aligned}$$

Autrement dit, $(\tau_b)^{-1} = \tau_{-b}$.

Démonstration. On vérifie trivialement que $\tau_b \circ \tau_{-b} = \tau_b \circ \tau_{-b} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. $\square$

5.2 Homothétie

On note O l'origine du plan complexe (i.e. le point d'affixe 0).

Théorème 6.26 (Homothéties)

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, l'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation

$$h : z \mapsto kz \qquad \text{et donc} \qquad h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{k} z$$

Si Ω est un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, l'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation

$$h_\omega : z \mapsto z' := k(z - \omega) + \omega$$

Démonstration. On fait la preuve dans le cas général, pour h_ω. Si on note $M(z)$ et $M'(z')$ l'image de M par h_ω, alors on a

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

ce qui se traduit en termes d'affixes par

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

et donc $h_\omega(z) = z' = k(z - \omega) + \omega$. □

5.3 Rotations

On a déjà vu que multiplier un complexe z par $e^{i\theta}$ revient à le faire "tourner" d'un angle θ (si $z \neq 0$, cela revient en effet à augmenter son argument de θ).

Théorème 6.27 (Rotations)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, la rotation de centre O et d'angle orienté θ est la transformation

$$\rho : z \mapsto e^{i\theta} z \qquad \text{et donc} \qquad \rho^{-1} : z \mapsto e^{-i\theta} z$$

Si Ω un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ est la transformation

$$\rho_\omega : z \mapsto z' := e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Démonstration. Cela suit le même principe que la preuve précédente. □

5.4 Similitudes directes

Définition 6.28

On dit que $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $s(z) = az + b$.

Remarque (Hors-programme)**.** Les similitudes directes sont exactement toutes les transformations du plan qui conserve les rapports entre distances et les angles orientés : si on note A', B', C', D' les images de A, B, C, D par une similitude directe, on a

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Une propriété importante est que toute similitude directe peut s'écrire ou bien comme une translation, ou bien comme une composée d'une rotation et d'une homothétie. Reconnaitre une similitude, c'est identifier précisément quelles sont les transformations du plan qui la constituent.

Méthode (Reconnaitre une similitude directe)

Soit $s(z) = az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors $s = \tau_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe ω, i.e. solution de $s(\omega) = \omega$, donc égal à $\dfrac{b}{1-a}$. Le point Ω d'affixe ω est appelé le centre de la similitude. s est alors la composée de :
  - l'homothétie h_ω de centre ω et de rapport $|a|$ et de...
  - la rotation ρ_ω de centre ω et d'angle $\arg a$.

  L'ordre de la composition importe peu : exceptionnellement ici, $s = h_\omega \circ \rho_\omega = \rho_\omega \circ h_\omega$.

Remarque. Il existe des transformations du plan qui ne sont pas des similitudes directes, telles que la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. Il s'agit en fait d'une *similitude indirecte*, car elle transforme un angle θ en $-\theta$. Mais cela n'est pas au programme.

6 Compléments

Théorème 6.29 (Corestreindre f à $f(E)$ la rend surjective)

Soit $f : E \to F$ une application. La corestriction de f à $f(E)$ est une application bien définie et surjective. Dit autrement, l'application

$$\begin{aligned} g : E &\to f(E) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{est surjective}$$

On peut synthétiser ce théorème par le fait que l'application $f|^{f(E)}$ est toujours surjective.

Démonstration. Tout d'abord, g est une application bien définie : il est clair que pour tout $x \in E$, on a $g(x) = f(x) \in f(E)$ par définition. Ensuite, on vérifie que g est surjective : soit $y \in f(E)$. Par définition de $f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, on a également $g(x) = f(x) = y$, donc g est surjective. □

Théorème 6.30 (Si f est injective, sa restriction l'est encore.)

Soit $f : E \to F$ une application injective et $A \subset E$. La restriction de f à A est encore une application injective. Dit autrement, l'application

$$\begin{aligned} h : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{est injective}$$

Démonstration. L'application h étant une restriction de f, elle est bien définie. Montrons que h est injective. Soit $x, x' \in A$. On suppose que $h(x) = h(x')$. Montrons que $x = x'$.

$$\begin{aligned} & h(x) = h(x') \\ \Longrightarrow\ & f(x) = f(x') \\ \Longrightarrow\ & x = x' && \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

D'où h est injective. □

8 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on peut :

- Revenir à la définition : considérer deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$ et montrer que $x = x'$.
- Bien plus rarement : trouver une fonction g telle que $g \circ f$ soit injective, et montrer que cela entraine f injective (cf TD).

Si on veut montrer que f n'est pas injective, on montre la négation de la définition.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on peut :

- Pour chaque $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ et montrer qu'il existe au moins une solution.
- Bien plus rarement : trouver une fonction h telle que $f \circ h$ soit surjective, et montrer que cela entraine f surjective (cf TD).

Si on veut montrer que f n'est pas surjective, on montre la négation de la définition.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut :

- Montrer que f est injective et surjective.
- Trouver une application $g : F \to E$ qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. On a alors en plus $g = f^{-1}$.
- Pour chaque $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ et montrer qu'il existe exactement une solution.

Pour le dernier item, la rédaction type est la suivante :

$$\begin{aligned}
&\text{Soit } y \in F \text{ et } x \in E \\
y = f(x) &\iff \dots \\
&\iff \dots \\
&\iff x = g(y) \qquad \text{(avec } g \text{ à déterminer)}
\end{aligned}$$

Auquel cas, on a non seulement montré que f est bijective, mais en plus on peut conclure que $g = f^{-1}$.

On verra d'autres méthodes plus tard en cours d'année, mais elles ne s'appliquent que dans un cadre particulier (avec des conditions sur E et/ou F) et sont donc moins générales que les méthodes ci-dessus.