Chapitre 4

Sommes et produits

Plan du chapitre

1 Sommes et produits

1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Définition 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. On notera leur somme et leur produit par :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad \text{"somme pour } i \text{ allant de } 0 \text{ à } n \text{ des } a_i\text{".}$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n \qquad \text{"produit pour } i \text{ allant de } 0 \text{ à } n \text{ des } a_i\text{".}$$

La lettre i est appelé l'indice de sommation. Il s'agit toujours d'un **nombre entier**. Le choix de la lettre i de est arbitraire, c'est une variable **muette**. Son existence est limitée à l'expression qu'on met à l'intérieur de la somme ou du produit (ici a_i). On peut ainsi remplacer i par tout autre symbole qui n'est pas déjà utilisé :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{\heartsuit=0}^{n} a_\heartsuit \qquad \text{mais pas} \quad \cancel{\sum_{n=0}^{n} a_n} \quad !!$$

Souvent, l'expression a_i est de la forme $f(i)$ avec f une fonction simple et explicite. Les termes à sommer / à multiplier sont alors simplement $f(0)$, $f(1)$, $\cdots$, $f(n)$:

Exemple 1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{2}\underbrace{i^3}_{f(i)}=\underbrace{0^3}_{f(0)}+\underbrace{1^3}_{f(1)}+\underbrace{2^3}_{f(2)}=9$ $\displaystyle\prod_{k=0}^{3}(-1)^k=$ ....

Dans la définition précédente, l'indice i commence à 0, mais il est très fréquent de le faire commencer à 1, 2 ou plus. On étend donc cette définition à un cadre plus général :

Définition 4.2

Soit $m,n\in\mathbb{N}$ avec $m\leq n$. Soit $a_m,a_{m+1},\cdots,a_{n-1},a_n$ des nombres réels. On notera :

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=a_m+a_{m+1}+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n}a_i=a_m\times a_{m+1}\times\ldots\times a_{n-1}\times a_n$$

L'entier m joue le rôle de valeur de départ pour i et l'entier n celui de sa valeur d'arrivée. Contrairement à i, les entiers m et n ne sont pas muets et ils doivent avoir été introduits pour que ces quantités soient bien définies.

Exemple 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k=1\times2\times\cdots\times n=n!$

L'expression de a_i peut dépendre des valeurs de i, de m et/ou de n, mais aussi être constante, cf exemples ci-dessous.

Exemple 3. Soit $m,n\in\mathbb{N}$ avec $m\leq n$.

$$\sum_{k=48}^{52}k=\ldots$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{e^k}{k^2+k}=\ldots$$

$$\prod_{i=n}^{n}e^{i\pi}=\ldots$$

$$\sum_{j=m}^{n}\frac{j-m}{n}=\ldots$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\alpha=\ldots$

$$\prod_{i=m}^{n}(n+m)=\ldots$$

Dans la somme $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(\cdots)$, il y a .... termes.

1.2 Familles d'objets

Définition 4.3

Soit I et E deux ensembles quelconques. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E indexée par I si pour tout $i\in I$, on a $a_i\in E$.

Cela revient à définir une fonction $a:I\to E$ et, pour tout $i\in I$, de poser $a_i:=a(i)$.

Exemple 4.

- Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à une famille $(u_0, u_1, \cdots)$ de réels indexés par $\mathbb{N}$. On peut aussi la voir comme une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à n associe u_n, et écrire "soit u une suite réelle".
- Lorsque $I = [\![1,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est en général notée $(a_i)_{1\le i\le n}$.

Définition 4.4

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On note la somme et le produit de tous les éléments de cette famille par :

$$\sum_{i\in I} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i$$

La notation $\sum_{i=m}^{n} a_i$ équivaut ainsi à écrire $\sum_{i\in[\![m,n]\!]} a_i$. Cela étant, la notation $\sum_{i\in I} a_i$ permet de traiter des cas plus généraux, cf remarque ci-dessous.

Remarque. Comment noter la somme ou le produit des termes d'indices pairs, par exemple $a_2, a_4, \cdots, a_{2p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$? Deux méthodes sont possibles :

Ou bien on écrit directement

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2p} = \sum_{i=1}^{p} a_{2i}$$

Ou bien, on pose $I = \{2, 4, \ldots, 2p\}$ et on peut écrire

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2p} = \sum_{i\in I} a_i$$

Hypothèse

Dans ce chapitre, on se restreindra toujours au cas où la somme (ou le produit) ne concerne qu'un nombre fini de termes. **On supposera dans toute la suite que I est un sous-ensemble fini de** $\mathbb{N}$.

Remarque. Dans une somme ou un produit fini, on peut sommer / faire le produit des termes dans l'ordre qu'on souhaite sans changer le résultat.

1.3 Opérations sur les sommes et produits

Théorème 4.5 (Opérations avec $\sum$ et $\prod$)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels. On note n le nombre d'éléments de I. Alors :

$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \qquad \prod_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i \qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad \prod_{i\in I} a_i^p = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^p$$

$$\sum_{i\in I}(a_i + \lambda) = \sum_{i\in I} a_i + n\lambda \qquad \prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$$

Démonstration. On fait les preuves dans le cas où $I = [\![1,n]\!]$. Toutes les preuves consistent à développer la somme et à regrouper les termes différemment :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)\\ &= (a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

Sur le même principe, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\square$

Attention ! En général $\sum_{i\in I}a_ib_i \neq \left(\sum_{i\in I}a_i\right)\left(\sum_{i\in I}b_i\right)$. Par exemple :

$$\sum_{i=1}^{10}(1\times 1)=10 \qquad \text{mais} \qquad \left(\sum_{i=1}^{10}1\right)\left(\sum_{i=1}^{10}1\right)=100$$

Théorème 4.6 ("Relation de Chasles")

Soit 3 entiers $m \leq r \leq n$. Soit $(a_i)_{m\leq i\leq n}$ une famille de réels. On a :

$$\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{i=m}^{r}a_i+\sum_{i=r+1}^{n}a_i \qquad \prod_{i=m}^{n}a_i=\left(\prod_{i=m}^{r}a_i\right)\left(\prod_{i=r+1}^{n}a_i\right)$$

On utilise fréquemment cette propriété pour ajouter ou retrancher un ou deux termes.

Exemple 5. Soit $n \geq 2$ un entier. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1}2^i = \underbrace{2^{n+1}}_{\text{terme } i=n+1} + \underbrace{1}_{\text{terme } i=0} + \sum_{i=1}^{n}2^i$

Remarque (Convention de sommation sur $\varnothing$)**.** Par convention si l'ensemble de sommation I est vide on pose :

$$\sum_{i\in\varnothing}(\cdots)=0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\varnothing}(\cdots)=1$$

et ce quel que soit ce qui se trouve dans les parenthèses. C'est cette convention qui permet de prendre $r=m$ ou $r=n$ dans la Propriété 4.6 : on constate que cela ne créé aucune contradiction.

Théorème 4.7 ("Chasles généralisé")

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On suppose que $J_1,\cdots,J_n$ forment une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{i\in J_1}a_i+\ldots+\sum_{i\in J_n}a_i \qquad \prod_{i\in I}a_i=\left(\prod_{i\in J_1}a_i\right)\cdots\left(\prod_{i\in J_n}a_i\right)$$

Comme $J_1, \cdots, J_n$ forment une partition, aucun de ces ensembles n'est vide. Cependant, les formules ci-dessus restent valides si un des ensembles $J_1, \cdots, J_n$ est vide, grâce aux conventions ci-dessus.

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n} \min(i, n)$.

1.4 Méthodes de calculs sur les sommes

Méthode (Changement d'indice)

Soit trois entiers $m \leq n$ et p, ainsi que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} z_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} z_j \qquad \text{avec } j = k + p$$

Vérifier en testant les valeurs aux bornes (lorsque $k = m$, on a bien $j = m + p$, lorsque $k = n$, on a bien $j = n + p$)

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{k} = \sum_{j=\ldots}^{\ldots} \ldots \qquad \text{avec } j = k - n$$

Remarque (Changements d'indice licites)**.** Pour transformer un indice j en un indice k, *les seuls changements d'indice possibles sont de la forme* $\boxed{j = \pm k + p}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Toute autre forme peut mener à une contradiction :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2k+1} \qquad \underset{j=2k+1\,?}{\rightsquigarrow} \qquad \sum_{j=3}^{7} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

Attention, lorsque la formule est de la forme $j = -k + p$, la plus haute valeur pour k donne la plus petite valeur pour j et vice versa. Il faut donc inverser les bornes, cf suite.

Méthode (Symétrisation)

Soit $m \leq n$ deux entiers et $(z_i)_{m \leq k \leq n}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} z_k = \sum_{j=m}^{n} z_{n+m-j} \qquad \text{avec } j = (n+m) - k$$

À nouveau, vérifier en testant les valeurs aux bornes (lorsque $k = m$ on a $j = n$ et lorsque $k = n$, on a $j = m$)

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(n-k) = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots \quad \text{avec } j = n+1-k$$

Méthode (Compensation de sommes)

De manière très générale, étant donné une expression $S = \sum_{k \in \dots} a_k - \sum_{k \in \dots} b_k$ où les termes a_k et b_k sont très similaires, on essaye (par des réécritures, des changements d'indices, du Chasles) de se ramener à

$$S = \cdots = \cancel{\sum_{k \in I} c_k} - \cancel{\sum_{k \in I} c_k} + (\cdots)$$

Pour rendre les sommes identiques, il est très fréquent de devoir faire du “+1–1” pour ajouter à une somme un terme qui manque dans l'autre.

Exemple 9. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ci-dessus, afin de rendre les sommes identiques, on a uniquement **rajouté des termes** aux sommes. Il est plus délicat d'enlever un terme à une somme, car il faut s'assurer que ce terme est bel et bien présent dans la somme. Que se serait-il passé si, pour rendre les sommes identiques, on leur avait *enlevé* des termes ? Le plus simple est de les transformer en $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}$. Mais alors, pour passer de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}$, il faut enlever les termes correspondants à $k = 1$ et $k = 2$:

$$\text{„} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{”}$$

Pourtant cette égalité est fausse si $n=1$! En effet, on a dans ce cas $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=1$ et $\sum_{k=3}^{1}\frac{1}{k}=\sum_{\varnothing}(\cdots)=0$. Le problème vient du fait que $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$ ne contient pas le terme pour $k=2$ qu'on voudrait lui enlever. Moralité : il vaut mieux rajouter des termes plutôt que d'en enlever.

En réalité, le même problème peut se poser si on rajoute des termes à une somme, par exemple si on passait de $\sum_{k=3}^{1}\frac{1}{k}$ à $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$ en ajoutant–retranchant $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$, on tombe sur la même égalité fausse que ci-dessus. Mais en pratique, ce cas est très rare, car cela implique d'avoir au départ une somme "pathologique".

Méthode (Sommes / Produits télescopiques)

Soit $m\leq n$ deux entiers et $(z_i)_{m\leq k\leq n+1}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n}(z_{k+1}-z_k)=(z_{n+1}\cancel{-z_n)+(z_n}-\dots)+\dots+(\dots\cancel{-z_{m+1})+(z_{m+1}}-z_m)=z_{n+1}-z_m$$

Si $z_m,\cdots z_n$ sont non nuls : $$\prod_{k=m}^{n}\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{z_{n+1}}{\cancel{z_n}}\times\frac{\cancel{z_n}}{\cdots}\times\dots\times\frac{\cdots}{\cancel{z_{m+1}}}\times\frac{\cancel{z_{m+1}}}{z_m}=\frac{z_{n+1}}{z_m}$$

Exemple 10. Calculer $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1.5 Sommes classiques

Remarque. Rappel : si $x\neq 0$, alors $x^0=1$. En revanche, "0^0" n'est pas toujours défini, notamment dans le calcul de limites. On évitera donc de l'écrire.
Néanmoins, dans le cadre d'une *somme*, par *convention* : $\sum_{k=0}^{n}x^k:=1+x+\ldots+x^n$ pour tout réel x, même pour $x=0$. Quand on développe une somme, tout terme x^0 est en fait traité comme un 1 (et on évitera d'écrire x^0).

Théorème 4.8 (Factorisation de a^n-b^n)

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}=(a-b)\sum_{j=0}^{n-1}a^{n-1-j}b^j$$

Démonstration. La dernière égalité découle d'un changement d'indice $j=n-1-k$ (symétrisation). Montrons la permière égalité. Un calcul direct donne :

$\square$

Remarque. Pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Théorème 4.9 (Sommes usuelles)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

3. **Somme géométrique :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Montrons la première formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. $\square$

- Pour $n = 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} k = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$, donc la propriété est vérifiée au rang 0.
- Supposons la propriété vérifiée à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons-la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= n+1+\sum_{k=1}^{n} k && \text{(même si } n{=}0\text{, le terme } n+1 \text{ est bien présent dans la somme)} \\ &= n+1+\frac{n(n+1)}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

d'où la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

La deuxième formule se montre également par récurrence (laissée en exercice). Pour la dernière formule : elle est immédiate si $x=1$. Supposons $x \neq 1$. Par la Propriété 4.9 :

$$1-x^{n+1} = 1^{n+1} - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$$

En divisant par $1-x$, on retrouve la formule voulue.

1.6 Sommes doubles

Certaines familles peuvent être indexées par plusieurs indices, par exemple $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]}$ est une famille de 6 éléments : $\quad a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13},\qquad a_{21},\quad a_{22},\quad a_{23}.$

Grossièrement, on appelle somme double une somme qui fait intervenir deux indices de sommation : un exemple de somme double est

$$S = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$$

Pour calculer une somme double, il faut se ramener à calculer deux sommes simples imbriquées. Dans la suite, pour simplifier, on considère que les indices de sommation commencent tous à 1.

Calcul de somme double (cas rectangulaire) Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$. Une somme double est dite rectangulaire si elle est de la forme :

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

- Méthode directe : pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, on calcule la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Puis, on calcule $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$.
- Si la méthode directe ne marche pas, on intervertit les deux sommes :

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

  et on retente la méthode directe : pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$. Puis on calcule $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$.

Exemple 11. Par linéarité (Proposition 4.5), calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j)$.

Calcul de somme double (cas triangulaire) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il peut arriver que la sommation de la seconde somme dépend de l'indice de la première somme :

$$S = \sum_{\boxed{i}=1}^{n} \sum_{j=1}^{\boxed{i}} a_{ij} \quad = \quad \underbrace{a_{11}}_{\substack{i=1\\ j=1}} + \underbrace{a_{21} + a_{22}}_{\substack{i=2\\ 1\leq j\leq 2}} + \underbrace{a_{31} + a_{32} + a_{33}}_{\substack{i=3\\ 1\leq j\leq 3}} + \ldots$$

- Méthode directe : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on calcule $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$. Puis on calcule $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$.
- Si la méthode directe ne marche pas, on intervertit les sommes mais ATTENTION ! Ici on ne peut plus le faire directement :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \neq \cancel{\sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$$

Écrire $\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n}(\ldots)$ n'a d'ailleurs aucun sens : quel serait la valeur maximale pour l'indice j, alors que i est une variable muette qui n'existe que dans la seconde somme ? Dans un cas triangulaire, il faut faire attention pour permuter les sommes :

$S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$

Pour chaque i, on a $j \in [\![1,i]\!]$

$$\begin{array}{cc|cccccc} & & & & j & & \\ & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline & 1 & \text{x} & & & & \\ & 2 & \text{x} & \text{x} & & & \\ i & 3 & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & n & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \cdots & \text{x} \end{array}$$

$S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$

Pour chaque j, on a $i \in [\![j,n]\!]$

Après interversion, méthode directe : pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on calcule $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$, puis $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{ij}\right)$.

Exemple 12. Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$.

Quelques notations :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad\qquad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

Dans un cas rectangulaire $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, si on peut écrire $a_{ij} = b_i c_j$, on peut très facilement calculer la somme double :

Théorème (Découplage de sommes doubles)

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $(b_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ deux familles de réels. Alors

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} c_j\right)$$

Plus généralement, si I, J sont des parties finies de $\mathbb{N}$ et $(b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J}$ sont des familles de réels :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} c_j\right)$$

$\square$

Exemple 13. Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficient binomial, combinaisons

Définition 4.10 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre entier factorielle n, noté $n!$ est défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{produit des entiers de 1 à } n$$

Par convention, $0! = 1$.

La convention $0! = 1$ découle en fait de la définition et d'une convention qu'on a déjà vue :

$$0! = \prod_{k=1}^{0}(\cdots) = \prod_{\varnothing}(\cdots) = 1$$

Définition 4.11

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dit "k parmi n", de la façon suivante :

- Si $0 \leq k \leq n$, alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
- Si $k < 0$ ou $k > n$, alors on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$.

Le nombre $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de sous-ensembles de cardinal k dans un ensemble de cardinal n. Par exemple $\binom{4}{2}$ est égal au nombre de sous-ensemble à 2 éléments dans un ensemble à 4 éléments : dans l'ensemble $\{a,b,c,d\}$, on dénombre 6 sous-ensembles de 2 éléments :

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{a,d\} \quad \{b,c\} \quad \{b,d\} \quad \{c,d\}$$

ce qui signifie que $\binom{4}{2} = 6$.

Exemple 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On vérifie directement que :

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \ldots\ldots$

Théorème 4.12 (Symétrie)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. Si $0 \leq k \leq n$:
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$
Si $k < 0$ ou $k > n$, on a toujours $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{n-k}$. □

Théorème 4.13 (Triangle de Pascal)

Soit $0 \leq k < n$ deux entiers. Alors
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. Un calcul direct donne :

□

Triangle de Pascal. Il permet de déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et de n. Comme $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, on peut placer les 1 comme ci-dessous (voire utiliser le fait que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$). Le reste se déduit du théorème ci-dessus.

$\binom{n}{k}$		k: 0	1	2	3	4	5
n	0	1					
	1	1	1				
	2	1		1			
	3	1			1		
	4	1				1	
	5	1					1

2.2 Binôme

Théorème 4.14 (Formule du binôme de Newton)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

Démonstration. La seconde égalité découle du changement d'indice $j = n - k$ (symétrisation). Il suffit donc de montrer la première égalité pour montrer la formule entière. Montrons par récurrence que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a

  $$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} = 1 = (a+b)^0$$

  où la dernière égalité est vraie par la convention $0^0 = 1$. Ainsi la formule est vraie pour $n = 0$.

- On suppose que la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

  Donc la formule est vraie au rang $n+1$.

- Ainsi, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Remarque (Calcul de $(a+b)^n$ pour des petites valeurs de n)**.** Pour appliquer la formule, il faut connaitre les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. Pour cela, on peut former le triangle de Pascal jusqu'à la ligne n. Les coefficients $\binom{n}{k}$ se lisent alors sur la ligne numéro n.

Exemple 15. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $(a+b)^5$

3 Méthodes pour les exercices

Avant toute chose, il faut bien avoir en tête les règles de calcul avec les symboles $\sum$ et $\prod$, ce qui est permis et surtout ce qui ne l'est pas.

Méthode

Pour calculer une somme $\sum_{k=\dots}^{\dots} a_k$, on peut :

- Reconnaitre une somme usuelle : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$, ou encore $(a+b)^n$ et $a^n - b^n$.
- Faire des changements d'indice (y compris symétrisation).
- Ajouter ou retirer des termes de la somme (parfois pour l'éliminer avec une autre somme similaire).
- Réécrire a_k différemment, parfois pour faire apparaitre une somme télescopique.

Cette méthode s'adapte aussi pour les produits $\prod_{k=\dots}^{\dots} a_k$, notamment faire apparaitre un produit télescopique.

Par ailleurs, pour une somme de termes d'une suite géométrique, il est toujours intéressant de se rappeler la “formule” :

$$\sum q^k \underbrace{=}_{\text{si } q\neq 1} \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Méthode

Pour calculer une somme double $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$, on peut :

- Employer la méthode directe : on calcule $\sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$, puis $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$.
- On intervertit les sommes puis on retente la méthode directe (attention si la somme est triangulaire).
- Si $a_{ij} = b_i c_j$ et que la somme est rectangulaire, on peut appliquer le théorème 1.6.
- Enfin, on peut toujours faire des réécritures, des changements d'indices, reconnaitre des sommes usuelles, etc.