Chapitre 4

Calcul dans $\mathbb{R}$, trigonométrie

Plan du chapitre

1 Inégalités et intervalles

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Rappels : pour tous réels a, b :

- $a < b$ se lit “a *strictement* inférieur à b”. Noter que

$$a < b \iff (a \leq b \quad \text{et} \quad a \neq b)$$

- $a \leq b$ se lit “a inférieur (ou égal) à b”. Noter que

$$a \leq b \iff (a < b \quad \text{ou} \quad a = b)$$

- $>$ et $\geq$ sont les symboles symétriques : supérieur *strict* et supérieur (ou égal).
- $a > 0$ se lit “a est *strictement* positif”. De même pour $a < 0$.
- $a \geq 0$ se lit “a est positif (ou nul)”. De même pour $a \leq 0$.

Propriété 4.1 (Opérations et inégalités)

1. Addition : si deux inégalités sont **dans le même sens**, on peut les additionner :

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a+c \leq b+d$$

2. Multiplication : si on multiplie une inégalité par un réel **positif** (resp. **négatif**), alors le sens est conservé (resp. est inversé) :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ c \geq 0 \end{cases} \implies ac \leq bc$$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ c \leq 0 \end{cases} \implies ac \geq bc$$

Exemple 1. Soit a,b,c,d quatre réels. Est-ce que $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ entraine $ac \leq bd$?

Propriété 4.2 (Transitivité et inégalités)

Soit a,b,c trois réels.

- $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases}$ entraine $a \leq c$.
- $\begin{cases} a < b \\ b \leq c \end{cases}$ entraine $a < c$.
- $\begin{cases} a \leq b \\ b < c \end{cases}$ entraine $a < c$.

Idem si toutes les inégalités ci-dessus changent de sens.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$ des réels *positifs*. Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors tous les a_i sont nuls.

1.2 Fonctions et (in)équations

Propriété 4.3 (Appliquer une fonction à une inégalité)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si $a \leq b$ et f est croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- Si $a \leq b$ et f est décroissante sur $[a, b]$, alors $f(a) \geq f(b)$.
- Si $a < b$ et f est *strictement* croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) < f(b)$.
- Si $a < b$ et f est *strictement* décroissante sur $[a, b]$, alors $f(a) > f(b)$.

Remarque. Il faut que f soit définie sur ***tout*** l'intervalle $[a, b]$. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais n'est pas définie en zéro. Ainsi, il est faux d'écrire :

$$-2 \leq 2 \implies \cancel{\frac{1}{-2} \geq \frac{1}{2}}$$

En prenant des fonctions f particulières, on en déduit les résultats suivants :

Propriété 4.4 (Inégalités et puissance)

Pour tous réels a, b,

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $\boxed{0 \leq} a \leq b$, alors $a^{2p} \leq b^{2p}$ car ...
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $a \leq b \boxed{\leq 0}$, alors $a^{2p} \geq b^{2p}$ car ...
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$, alors $a^{2p+1} \leq b^{2p+1}$ car ...
4. Si $\boxed{0 <} a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
5. Si $a \leq b \boxed{< 0}$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
6. Si $\boxed{0 <} a \leq b$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a^\alpha \leq b^\alpha$.

Exemple 2. Montrer que si a, b sont *positifs*, alors $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

Exemple 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E) \quad x - 2 \leq \sqrt{3x+4}$$

Remarque. Si f est définie en a et $a = b$, il est évident que $f(a) = f(b)$. Par contre, si $f(a) = f(b)$, cela ne signifie pas nécessairement que $a = b$.

1.3 Les parties de $\mathbb{R}$

Soient a, b deux réels avec $a < b$. On construit des intervalles, à partir des bornes a, b et $\pm\infty$:

- Les intervalles bornés, car leurs deux bornes sont finies :
  - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: intervalle fermé (en a et b).
  - $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: intervalle ouvert (en a et b).
  - $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: intervalle ouvert en b, fermé en a.
  - $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: intervalle ouvert en a, fermé en b.

- Les intervalles non bornés, car au moins une de leurs bornes est $\pm\infty$:
  - $\left]-\infty,a\right] = \{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$: intervalle fermé en a. Idem pour $\left[a,+\infty\right[$.
  - $\left]a,+\infty\right[= \{x\in\mathbb{R} \mid x > a\}$: intervalle ouvert en a. Idem pour $\left]-\infty,a\right[$.
  - $\left]-\infty,+\infty\right[= \mathbb{R}$.

Remarque. Attention, un intervalle avec une borne infinie est toujours ouvert en cette borne infinie.

Définition 4.5

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que ...

- $a\in\mathbb{R}$ est un majorant de A si : $\forall x\in A \quad a\geq x$.
- $a\in\mathbb{R}$ est un minorant de A si : $\forall x\in A \quad a\leq x$.
- $a\in\mathbb{R}$ est le maximum (ou le plus grand élément) de A si a est un majorant de A **et** $a\in A$.
- $a\in\mathbb{R}$ est le minimum (ou le plus petit élément) de A si a est un minorant de A **et** $a\in A$.

Attention : un majorant ou un minorant de A n'appartient pas nécessairement à A !

Exemple 4. Donner un majorant et un minorant (lorsque cela est possible) des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

$$A=\left\{-10,-\pi,\frac{2}{3}\right\},\quad B=\left[-3,5\right[,\quad C=\left\{\sqrt{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Ces parties ont-elles un plus petit élément, un plus grand élément ?

Propriété 4.6 (Unicité du plus grand / petit élément)

Soit $A\subset\mathbb{R}$. Si A admet pour maxima a et a', alors $a=a'$. Autrement dit, le maximum de A est unique. Idem pour le minimum.

C'est pour cela que l'on dit LE maximum (lorsqu'il existe) mais UN majorant.

Remarque. Tout ensemble fini $A=\left\{a_1,\dots,a_n\right\}$ admet un maximum (resp. minimum) noté

$$\max(a_1,\dots,a_n) \qquad (\text{ resp. } \min(a_1,\dots,a_n)\ )$$

Définition 4.7

Une partie non vide de $\mathbb{R}$ est dite majorée (resp. minorée) si elle admet (au moins) un majorant (resp. minorant). Elle est dite bornée si elle est à la fois majorée *et* minorée.

1.4 Valeur absolue

Définition 4.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $|x| := \max(x, -x)$ la **valeur absolue** de x. Autrement dit,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, s'il existe $h \in \mathbb{R}_+$ tel que $-h \leq x \leq h$, alors $|x| \leq h$.

Exemple 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la valeur de $|x^2 - a|$ en fonction de x.

Propriété 4.9 (Propriétés de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
4. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$.
5. $|xy| = |x| \times |y|$, et si $y \neq 0$: $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
6. $|x|^2 = x^2$ et $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$.

Exemple 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E) : \quad |x+1| \leq |3x-1|$$

Propriété 4.10 (Inégalités triangulaire)

Soit x, y deux réels.

Première inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x|+|y|$

Seconde inégalité triangulaire : $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

Démonstration.

□

Exemple 7. Soit $x \in [-1,4]$ et $y \in [-3,1]$.

1. Donner un majorant simple de $|x|$ et $|y|$.
2. Démontrer que $|x+2y| \leq 10$.
3. Démontrer que $|x+2y| \leq 7$.

1.5 Distance entre deux réels

On peut représenter l'ensemble des réels ℝ par une droite orientée :

Définition 4.11

Soit x, y deux réels. La distance de x à y est le nombre réel $d(x,y) = |x-y|$.

On a toujours $d(x,y) = d(y,x)$: ce réel correspond à la notion intuitive de distance entre deux réels x et y.

Propriété 4.12 (Une autre version de l'inégalité triangulaire)

Pour tous réels a, b, c,

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \text{ou encore} \quad |b-a| \leq |c-a| + |b-c|$$

Démonstration. On pose $x := c-a$ et $y := b-c$. Alors $x+y = b-a$ si bien que

$$d(a,b) = |b-a| = |x+y| \leq |x| + |y| = |c-a| + |b-c| = d(a,c) + d(c,b)$$

□

1.6 Partie entière

Définition 4.13 (Partie entière)

Soit x un réel. On appelle partie entière de x, le plus grand entier p tel que $p \leq x$. Il est noté $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 8. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

$$\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = \dots \qquad \lfloor \pi \rfloor = \dots \qquad \lfloor -e \rfloor = \dots$$

Propriété 4.14

Soit $p, x \in \mathbb{R}$. Alors

$$p = \lfloor x \rfloor \iff p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \leq x < p+1$$

$$p = \lfloor x \rfloor \iff p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x-1 < p \leq x$$

Exemple 9. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

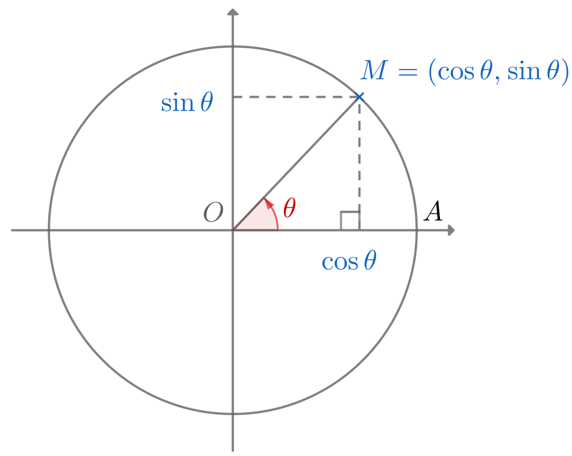
Remarque. On retrouve couramment la notation $\lceil x \rceil$ pour désigner le plus petit entier r tel que $x \leq r$.

2 Trigonométrie

2.1 Définitions des fonctions cos et sin

Définition 4.15 (Cercle trigonométrique)

On appelle cercle trigonométrique (ou cercle unité) le cercle du plan de centre 0 et de rayon 1.

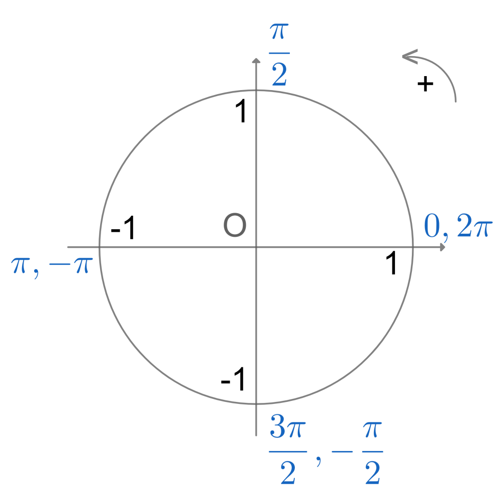


Définition 4.16

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique point M du cercle unité tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. On définit alors :

$$\cos\theta := \text{"abscisse de } M\text{"}$$
$$\sin\theta := \text{"ordonnée de } M\text{"}$$

Remarque (La mesure en radian)**.** Plutôt que d'exprimer l'angle θ en degrés, en prépa on utilise les radians. La valeur θ en radian correspond à la longueur (avec un signe) de l'arc de cercle $\widehat{AM}$. Comme le cercle unité a un rayon 1, sa circonférence vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$: c'est la longueur en radians d'un "tour complet" dans le sens "positif" (qu'on appelle sens trigonométrique et qui correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre). Ainsi, si par exemple M a pour coordonnées $(-1, 0)$, l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ vaudra π radians [1], tandis que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ vaudra $-\pi$ radians.



1. En maths, on omet de préciser "radians" et on pourra donc écrire $\theta = \pi$ directement

Propriété 4.17

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par construction,

- $\cos\theta$ et $\sin\theta$ appartiennent à $[-1,1]$.
- $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ et $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$.
- $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

Démonstration. On ne montre que la dernière assertion. Le triangle rectangle contenant le point M (représenté sur la figure) a une hypoténuse de longueur 1 et des côtés de longueur $|\cos\theta|$ et $|\sin\theta|$. Ainsi par le théorème de Pythagore, $|\cos\theta|^2+|\sin\theta|^2=1^2$, d'où le résultat de l'assertion car pour tout réel x, $|x|^2=x^2$. □

2.2 Formulaire : cosinus et sinus

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Astuce : les valeurs correspondent à $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ avec $n \in [\![0,4]\!]$. Elles sont décroissantes pour cos et croissantes pour sin.

Formulaire

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos x & \cos(-x) &= \cos x & &(\cos \text{ est paire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\sin(x+2\pi) &= \sin x & \sin(-x) &= -\sin x & &(\sin \text{ est impaire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\cos(x+\pi) &= -\cos x & \cos(\pi-x) &= -\cos x & &\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x & \sin(\pi-x) &= \sin x & &\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x & &\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x & &
\end{aligned}$$

Astuce : toutes ces formules sont faciles à retrouver sur un dessin avec le point M associé à l'angle $x=\dfrac{\pi}{6}$:

Propriété 4.18 (Formules d'addition)

Pour tous réels a, b

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Astuce : avec cos, on *change le signe*, mais pas avec sin. En revanche, sin *mélange* les cos et les sin, tandis que cos non. De plus, les deux formules avec $a-b$ se déduisent aisément des autres en remplaçant b par $-b$.

Propriété 4.19 (Formules de duplication)

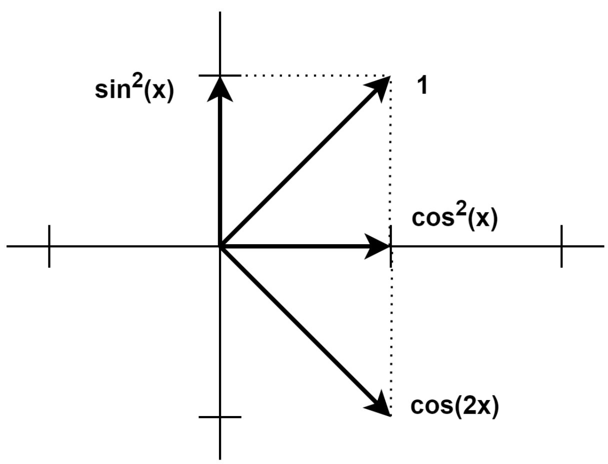
Pour tout réel x,

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$
$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

La formule $\sin(2x)$ peut se retrouver à partir de $\sin(a+b)$ avec $a = b = x$. Pour les trois autres, on peut se rappeler le dessin très pratique ci-contre :

On retrouve aussi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, utile pour s'assurer qu'on a placé les bonnes fonctions aux bonnes flèches.

Noter que les flèches peuvent aussi se prendre "à l'envers" : par exemple $1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$.



Propriété 4.20 (Formules de linéarisation)

Pour tous réels a, b,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$
$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

Astuce : on les retrouve facilement à partir des formules d'addition.

2.3 Tangente et cotangente

Définition 4.21 (Tangente)

La tangente d'un réel x est définie par $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Cette fonction est définie en tout réel x sauf les valeurs $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Avec cette définition, on retrouve facilement des valeurs particulières de tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Toujours à partir de la définition, on peut en déduire des formules sur $\tan(x+\pi)$, $\tan(\pi - x)$, etc. Les plus importantes sont

$$\tan(x+\pi) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x \qquad (\tan \text{ est impaire, } \pi\text{-périodique})$$

Dans un triangle *rectangle*, si x est un angle qui n'est pas l'angle droit,

$$\cos x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{H}} \qquad \tan x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{A}} \qquad \text{(relation CAH-SOH-TOA)}$$

avec H la longueur de l'hypoténuse, O celle du côté opposé à l'angle x, et A celle du côté adjacent (qui n'est pas l'hypoténuse).

Propriété 4.22 (Formules d'addition, tangente)

Pour tous réels a, b, lorsque ces expressions ont un sens :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Par exemple, la première formule n'est valide que si $a, b, a+b \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On les retrouve par les formules d'addition de cos et sin. Quand $a = b$, on obtient une formule de duplication de $\tan(2a)$:

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Propriété 4.23 (Formules de l'angle moitié)

Pour tout réel $x \not\equiv \pi[2\pi]$, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

la dernière formule n'étant vraie que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Astuce : il faut retenir qu'il y a 3 termes : $2t$, $1-t^2$, $1+t^2$. Comme $\cos x$ et $\sin x$ sont toujours définis pour tout x, il est naturel que $1+t^2$, qui ne s'annule jamais, soit au dénominateur. La dernière se déduit du quotient des deux premières, ou de la formule de $\tan(2a)$ avec $a = \frac{x}{2}$.

Définition 4.24 (Cotangente)

La cotangente d'un réel x est définie par $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$. Elle n'est donc pas définie en $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

2.4 Équations avec cosinus, sinus, tangente

Propriété 4.25 (Équations et trigonométrie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a = \cos b \iff (a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b\ [2\pi])$$

$$\sin a = \sin b \iff (a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b\ [2\pi])$$

et si $a, b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b\ [\pi]$$

Pour les inégalités, on les traite au cas par cas en s'aidant d'un cercle trigonométrique.

Exemple 10. Résoudre $\cos x \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3 Méthodes pour les exercices

Méthode (Résoudre des équations ou inéquations)

On suppose ici que f et g sont des fonctions “simples”.

- Pour résoudre $f(x) \leq g(x)$, on applique la méthode de l'exercice 3 :
  - On détermine d'abord le domaine d'existence, i.e. les valeurs pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens. Dans cette méthode, on le notera D.
  - On essaie ensuite de résoudre l'équation par **équivalences** successives. On peut être amené à faire une disjonction de cas selon les valeurs de x. On obtiendra pour chaque cas des ensembles de solutions $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$ tous inclus dans D.
  - L'ensemble solution est alors $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots$ et est inclus dans D.
- Pour résoudre $f(x) = g(x)$: on peut adopter la même démarche que ci-dessus, ou bien raisonner par analyse-synthèse (cf exercice à la fin du chapitre 1).
- Enfin, si f et/ou g font apparaitre des valeurs absolues, on peut aussi faire un tableau de signes pour chaque expression entre valeurs absolues et résoudre une (in)équation par colonne (cf exercice 6)