Chapitre 3

Calcul dans $\mathbb{R}$, trigonométrie

Plan du chapitre

1 Inégalités

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Rappels : pour tout réel a :

- $a > 0$ se lit “a est *strictement* positif”. De même pour $a < 0$.
- $a \geq 0$ se lit “a est positif (ou nul)”. De même pour $a \leq 0$.

Théorème 3.1 (Opérations et inégalités)

1. Transitivité :
$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \implies a \leq c$$
2. Addition : si deux inégalités sont **dans le même sens**, on peut les additionner :
$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a+c \leq b+d$$
3. Multiplication : si on multiplie une inégalité par un réel...

   ... **positif**, alors le sens est conservé :
$$\forall a,b,\lambda \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \implies \lambda a \leq \lambda b$$
   ... **négatif**, alors le sens est inversé :
$$\forall a,b,\lambda \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a \leq b \\ \lambda \leq 0 \end{cases} \implies \lambda a \geq \lambda b$$

Attention ! Pas de soustraction avec des inégalités : $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \cancel{\implies} a-c \leq b-d \qquad (0 \leq 1$ et $0 \leq 2$ mais...)

Remarque. Dans les assertions 1 et 2, si une des deux inégalités de départ est stricte, alors l'inégalité de la conclusion est stricte également. En revanche, pour l'assertion 3, on vérifie aisément que les deux inégalités de départ doivent être strictes pour obtenir une inégalité stricte à l'arrivée.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 0$, alors tous les réels $a_1, \cdots, a_n$ sont nuls.

1.2 Fonctions et (in)équations

Théorème 3.2 (Appliquer une fonction à une inégalité)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si f est croissante sur $[a,b]$ et si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- Si f est décroissante sur $[a,b]$ et si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.
- Si f est *strictement* croissante sur $[a,b]$ et si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
- Si f est *strictement* décroissante sur $[a,b]$ et si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

Remarque. Il faut que f soit définie sur ***tout*** l'intervalle $[a,b]$. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais n'est pas définie en zéro. Ainsi, il est faux d'écrire :

$$-2 \leq 2 \implies \cancel{\frac{1}{-2} \geq \frac{1}{2}}$$

En prenant des fonctions f particulières, on en déduit les résultats suivants :

Théorème 3.3 (Inégalités et puissance)

Pour tous réels a, b,

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $\boxed{0 \leq}\, a \leq b$, alors $a^{2p} \ldots\ldots b^{2p}$ car ...
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $a \leq b \boxed{\leq 0}$, alors $a^{2p} \ldots\ldots b^{2p}$ car ...
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$, alors $a^{2p+1} \ldots\ldots b^{2p+1}$ car ...
4. Si $\boxed{0 <}\, a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \ldots\ldots \frac{1}{b}$ car ...
5. Si $a \leq b \boxed{< 0}$, alors $\frac{1}{a} \ldots\ldots \frac{1}{b}$ car ...
6. Si $\boxed{0 <}\, a \leq b$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a^\alpha \leq b^\alpha$.

Exemple 1. Montrer que si a, b sont *positifs*, alors $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

On a vu au chapitre 0 qu'on pouvait résoudre des (in)équations sur $\mathbb{R}$ avec un raisonnement par analyse-synthèse. Une autre méthode, plus courte mais plus technique, consiste à raisonner par équivalences et/ou par disjonctions de cas.

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E) \quad x - 2 \leq \sqrt{3x+4}$$

Remarque. Si f est définie en a et $a = b$, il est évident que $f(a) = f(b)$. Par contre, si $f(a) = f(b)$, cela ne signifie pas nécessairement que $a = b$.

1.3 Majoration et minoration

Méthode (Majorer ou minorer une expression)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

- Pour majorer $a - b$, il faut majorer a et *minorer* b
- Pour minorer $a - b$, il faut minorer a et *majorer* a
- Pour majorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut majorer a et *minorer* b.
- Pour minorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut minorer a et *majorer* b.

Exemple 3. Soit $x \in [1, 2]$. Majorer et minorer l'expression $\dfrac{x^2 - \ln x}{x + 3}$.

2 Fonctions particulières

2.1 Valeur absolue

Définition 3.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $|x| := \max(x, -x)$ la **valeur absolue** de x. Autrement dit,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, s'il existe $h \in \mathbb{R}_+$ tel que $-h \leq x \leq h$, alors $|x| \leq h$.

Exemple 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x^2 - a| = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } a \leq 0 \\ a - x^2 & \text{si } a \geq 0 \text{ et si } x \in \left[-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right] \\ x^2 - a & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 3.5 (Propriétés de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
4. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$.
5. $|xy| = |x| \times |y|$, et si $y \neq 0$: $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
6. $|x|^2 = x^2$ et $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$.

Exemple 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E) : \quad |x+1| \leq |3x-1|$$

Théorème 3.6 (Inégalités triangulaire)

Soit x, y deux réels.

$$\textbf{Première inégalité triangulaire :} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\textbf{Seconde inégalité triangulaire :} \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

□

Exemple 6. Soit $x \in \left[-1,4\right]$ et $y \in \left[-3,1\right]$.

1. Donner un majorant simple de $|x|$ et $|y|$.
2. Démontrer que $|x+2y| \leq 10$.
3. Démontrer que $|x+2y| \leq 7$.

2.2 Distance entre deux réels

Définition 3.7

Soit x, y deux réels. La distance de x à y est le nombre réel $d(x,y) = |x-y|$.

La quantité $|x-y|$ représente en effet la distance entre les réels x et y lorsqu'ils sont disposés sur une droite orientée :

On a toujours $d(x,y) = d(y,x)$: ce réel correspond à la notion intuitive de distance entre deux réels x et y.

Théorème 3.8 (Une autre version de l'inégalité triangulaire)

Pour tous réels a, b, c,

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \text{ou encore} \quad |b-a| \leq |c-a| + |b-c|$$

Démonstration. On pose $x := c-a$ et $y := b-c$. Alors $x+y = b-a$ si bien que

$$d(a,b) = |b-a| = |x+y| \leq |x|+|y| = |c-a|+|b-c| = d(a,c)+d(c,b)$$

□

2.3 Partie entière

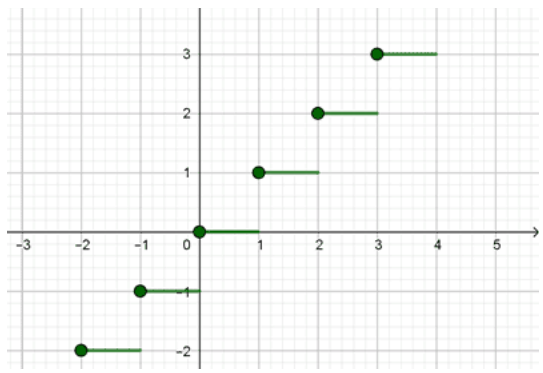
Définition 3.9 (Partie entière)

Soit x un réel. On appelle partie entière de x, le plus grand entier p tel que $p \leq x$. Il est noté $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 7. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

$$\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = \dots \qquad \lfloor \pi \rfloor = \dots \qquad \lfloor -e \rfloor = \dots$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (c'est une fonction discontinue) :



Théorème 3.10

La fonction partie entière est croissante : pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ $\quad x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

En particulier, si $p \leq x$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors $p \leq \lfloor x \rfloor$.

On dispose notamment d'une *caractérisation* de la partie entière :

Théorème 3.11

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$p = \lfloor x \rfloor \iff p \leq x < p+1$$
$$p = \lfloor x \rfloor \iff x-1 < p \leq x$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Définition 3.12 (Non officiel : partie décimale)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la partie décimale (ou partie fractionnaire) de x comme étant le réel noté

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

Théorème 3.13 (Non officiel)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \{x\} < 1$$

Bien que la partie décimale ne soit pas officiellement au programme, elle est extrêmement utile dans les exercices. Il faut introduire la notation $\{x\}$ et sa définition pour le correcteur avant de s'en servir (notamment parce que $\{x\}$ est censé représenter le singleton qui contient x).

Exemple 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\quad 2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$

Attention, pour un entier n, on a en général $\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$. Par exemple, avec $x = \dfrac{1}{2}$, on a $2\lfloor x \rfloor = 0$ et $\lfloor 2x \rfloor = 1$.

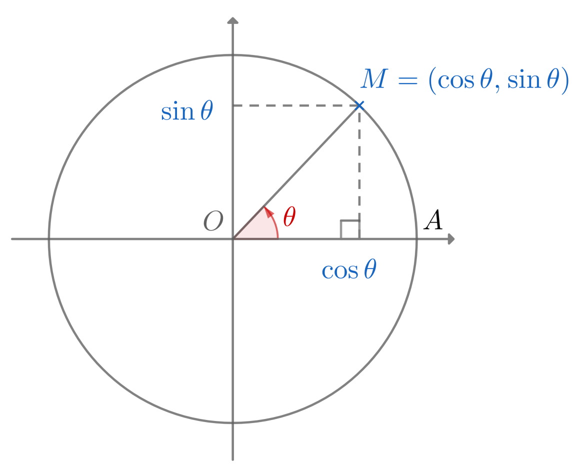
Remarque. On retrouve couramment la notation $\lceil x \rceil$ pour désigner le plus petit entier r tel que $x \leq r$.

3 Trigonométrie

3.1 Définitions des fonctions cos et sin

Définition 3.14 (Cercle trigonométrique)

On appelle cercle trigonométrique (ou cercle unité) le cercle du plan de centre 0 et de rayon 1.

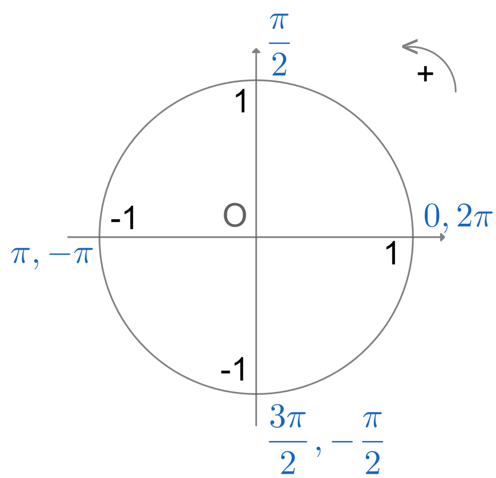


Définition 3.15

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, il existe un unique point M du cercle unité tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. On définit alors :

$$\cos\theta := \text{"abscisse de } M\text{"}$$
$$\sin\theta := \text{"ordonnée de } M\text{"}$$

Remarque (La mesure en radian)**.** Plutôt que d'exprimer l'angle θ en degrés, en prépa on utilise les radians. La valeur θ en radian correspond à la longueur (avec un signe) de l'arc de cercle $\widehat{AM}$. Comme le cercle unité a un rayon 1, sa circonférence vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$: c'est la longueur en radians d'un “tour complet” dans le sens “positif” (qu'on appelle sens trigonométrique et qui correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre). Ainsi, si par exemple M a pour coordonnées $(-1,0)$, l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ vaudra π radians[1], tandis que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ vaudra $-\pi$ radians.



Théorème 3.16

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par construction,

- $\cos\theta$ et $\sin\theta$ appartiennent à $\left[-1,1\right]$.
- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$.
- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Démonstration. On ne montre que la dernière assertion. Le triangle rectangle contenant le point M (représenté sur la figure) a une hypoténuse de longueur 1 et des côtés de longueur $|\cos\theta|$ et $|\sin\theta|$. Ainsi par le théorème de Pythagore, $|\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2 = 1^2$, d'où le résultat de l'assertion car pour tout réel x, $|x|^2 = x^2$. □

3.2 Formulaire : cosinus et sinus

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Astuce : les valeurs correspondent à $\frac{\sqrt{n}}{2}$ avec $n \in [\![0,4]\!]$. Elles sont décroissantes pour cos et croissantes pour sin.

1. En maths, on omet de préciser “radians” et on pourra donc écrire $\theta = \pi$ directement

Formulaire

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos x & \cos(-x) &= \cos x & &(\cos \text{ est paire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\sin(x+2\pi) &= \sin x & \sin(-x) &= -\sin x & &(\sin \text{ est impaire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\cos(x+\pi) &= -\cos x & \cos(\pi-x) &= -\cos x & &\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x & \sin(\pi-x) &= \sin x & &\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x & &\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x & &
\end{aligned}$$

Astuce : toutes ces formules sont faciles à retrouver sur un dessin avec le point M associé à l'angle $x=\frac{\pi}{6}$:

Théorème 3.17 (Formules d'addition)

Pour tous réels a, b

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b
\end{aligned}$$

Astuce : avec cos, on *change le signe*, mais pas avec sin. En revanche, sin *mélange* les cos et les sin, tandis que cos ne cause pas de mélange. De plus, les deux formules avec $a-b$ se déduisent aisément des autres en remplaçant b par $-b$.

Théorème 3.18 (Formules de duplication)

Pour tout réel x,

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x\\ 2\cos^2 x - 1\\ 1-2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x\sin x$$

La formule $\sin(2x)$ peut se retrouver à partir de $\sin(a+b)$ avec $a=b=x$. Pour les trois autres, on peut se rappeler le dessin très pratique ci-contre :

On retrouve aussi $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, utile pour s'assurer qu'on a placé les bonnes fonctions aux bonnes flèches.

Noter que les flèches peuvent aussi se prendre "à l'envers" : par exemple $1-2\sin^2 x=\cos(2x)$.

Théorème 3.19 (Formules de linéarisation)

Pour tous réels a, b,

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\
\sin a\sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)
\end{aligned}$$

Astuce : on les retrouve facilement à partir des formules d'addition.

3.3 Tangente et cotangente

Soit $x, a, b \in \mathbb{R}$. On note $x \equiv a\left[b\right]$ s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=a+kb$. Par exemple :

$$x \equiv \frac{\pi}{2}\left[\pi\right] \iff \exists k\in\mathbb{Z} \qquad x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

En particulier :

$$\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x\equiv\frac{\pi}{2}\left[\pi\right]\right\}$$

Définition 3.20 (Tangente)

La tangente d'un réel x est définie par $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Cette fonction est définie en tout réel x sauf les valeurs $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Autrement dit, le domaine de définiton de la fonction tan est $D_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. Avec cette définition, on retrouve facilement des valeurs particulières de tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Toujours à partir de la définition, on peut en déduire des formules sur $\tan(x+\pi)$, $\tan(\pi-x)$, etc. Les plus importantes sont

$$\tan(x+\pi) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x \qquad (\tan \text{ est impaire, } \pi\text{-périodique})$$

Dans un triangle *rectangle*, si x est un angle qui n'est pas l'angle droit,

$$\cos x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{H}} \qquad \tan x = \frac{\mathrm{O}}{\mathrm{A}} \qquad \text{(relation CAH-SOH-TOA)}$$

avec H la longueur de l'hypoténuse, O celle du côté opposé à l'angle x, et A celle du côté adjacent (qui n'est pas l'hypoténuse).

Théorème 3.21 (Formules d'addition, tangente)

Pour tous réels a, b, *lorsque ces expressions ont un sens*[2] :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

On peut retrouver les formules ci-dessus par les formules d'addition de cos et sin. Quand $a = b$, on obtient une formule de duplication de $\tan(2a)$:

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Théorème 3.22 (Formules de l'angle moitié)

Pour tout réel $x \not\equiv \pi\,[2\pi]$, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

la dernière formule n'étant vraie que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

Astuce : il faut retenir qu'il y a 3 termes : $2t$, $1-t^2$, $1+t^2$. Comme $\cos x$ et $\sin x$ sont toujours définis pour tout x, il est naturel que $1+t^2$, qui ne s'annule jamais, soit au dénominateur. La dernière se déduit du quotient des deux premières, ou de la formule de $\tan(2a)$ avec $a = \frac{x}{2}$.

Définition 3.23 (Cotangente)

La cotangente d'un réel x est définie par $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$. Elle n'est donc pas définie en $x = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

2. Par exemple, la première formule n'est valide que si $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ ont un sens, ou encore si $a, b, a+b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. On pourrait rajouter la condition $1 - \tan a \tan b \neq 0$, mais en fait elle découle des autres.

3.4 Équations avec cosinus, sinus, tangente

Théorème 3.24 (Équations et trigonométrie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a = \cos b \iff \left(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b\ [2\pi]\right)$$
$$\sin a = \sin b \iff \left(a \equiv b\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b\ [2\pi]\right)$$

et si $a, b \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b\ [\pi]$$

Pour les inégalités, on les traite au cas par cas en s'aidant d'un cercle trigonométrique.

Exemple 9. Résoudre $\cos(2x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour résoudre $f(x) \leq g(x)$ ou $f(x) = g(x)$, avec f, g deux fonctions :

- On peut raisonner par analyse-synthèse (cf Chapitre 0).
- On peut aussi résoudre l'équation par équivalences successives et/ou disjonctions de cas (cf exemple 2). Notamment, si f et/ou g font apparaitre des valeurs absolues, on peut faire un tableau de signes pour chaque expression entre valeurs absolues et résoudre une (in)équation par colonne (cf exemple 5).

Dans tous les cas, il convient de déterminer en premier lieu le domaine d'existence, i.e. les valeurs pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens.