

Accélération d'une invasion dans un modèle d'écologie évolutive



Gwenaël Peltier – Institut Montpellierain Alexander Grothendieck

sous la direction de Matthieu Alfaro



1 – L'ÉQUATION DE FISHER-KPP

Avant d'introduire notre modèle, on présente un cadre sans mutation/évolution, où la population, de densité $u(t, x)$, est uniquement structurée en espace $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t u = \underbrace{\partial_{xx} u}_{\text{migrations}} + \underbrace{u(1-u)}_{\text{naissances et morts}}, \quad (1)$$

avec condition initiale $u_0(x) \in [0, 1]$.

L'environnement est ainsi supposé *homogène* : le terme de naissances et de morts ne dépend pas de la position spatiale x .

3 – MODÈLE ÉVOLUTIF AVEC ENVIRONNEMENT HÉTÉROGÈNE

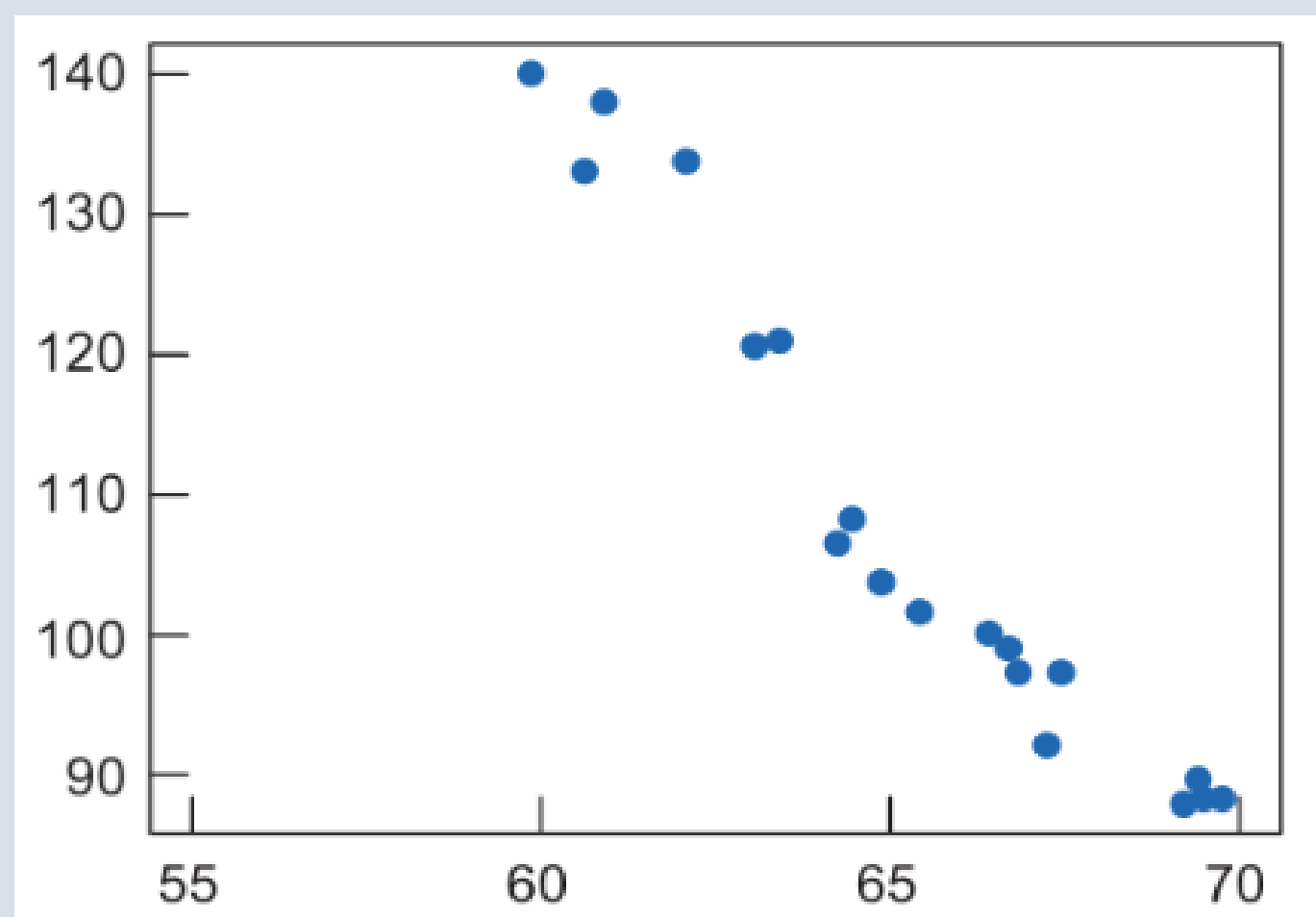
A présent, on considère une population $n(t, x, y)$ structurée selon une variable d'espace $x \in \mathbb{R}$ et selon un trait phénotypique $y \in \mathbb{R}$ qui influence sa survie.

$$\partial_t n = \underbrace{\partial_{xx} n}_{\text{migrations}} + \underbrace{\partial_{yy} n}_{\text{mutations}} + \left[\underbrace{r(x, y)}_{\text{croissance}} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} n(t, x, y') dy'}_{\text{compétition}} \right] n, \quad (2)$$

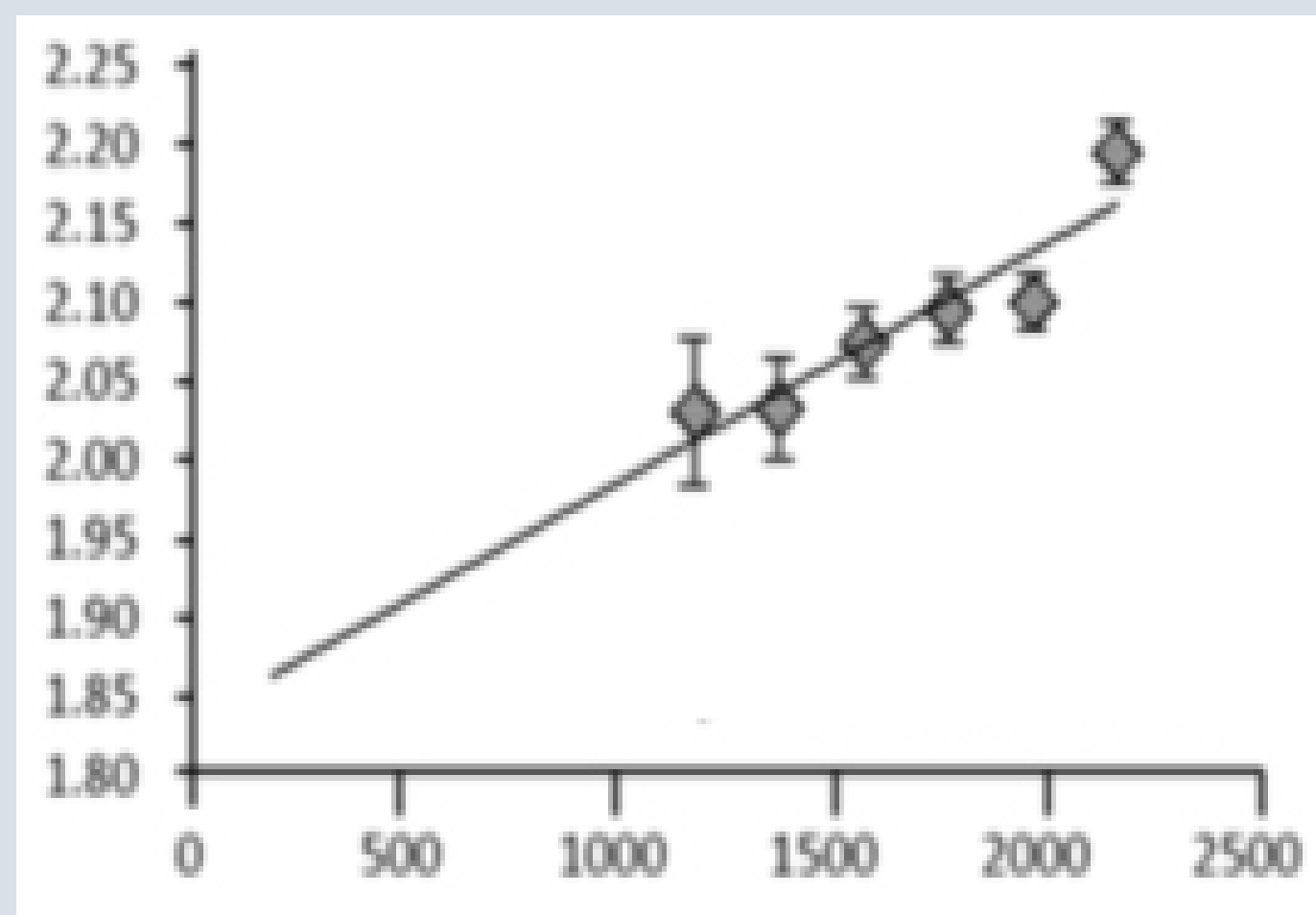
où $r(x, y) = 1 - A(y - Bx)^2$, avec $A, B > 0$. Le trait optimal pour la survie est donc $y_{opt}(x) = Bx$. On parle de *gradient environnemental* (qui est ici linéaire). Pour envahir tout l'espace, la population doit obligatoirement s'adapter.

Objectif : trouver une condition de "queue lourde" sur $n_0(x, y)$ (la plus générale possible) puis montrer qu'on a accélération de l'invasion sous cette condition.

4 – EXEMPLES DE GRADIENTS ENVIRONNEMENTAUX LINÉAIRES



Durée de la croissance des bourgeons du pin sylvestre selon la latitude.
Source : Savolainen et al. 2017.



Taille moyenne de l'aile des drosophiles en fonction de l'altitude.
Source : Tantowijoyo, Hoffmann, 2011.

6 – ACCÉLÉRATION POUR DES n_0 "À QUEUE LOURDE"

On fait une rotation du repère, et on note (X, Y) les nouvelles coordonnées, de sorte que X soit dirigé selon la direction $y = Bx$ (voir figure ci-dessous).

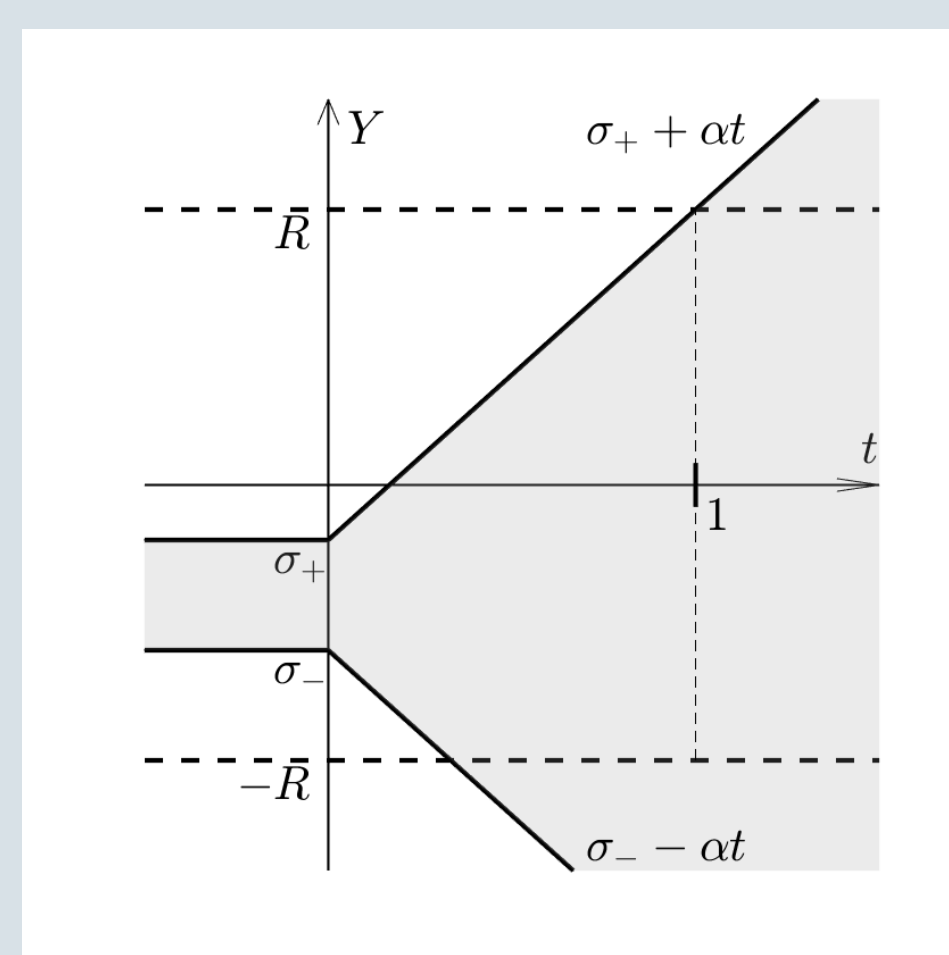
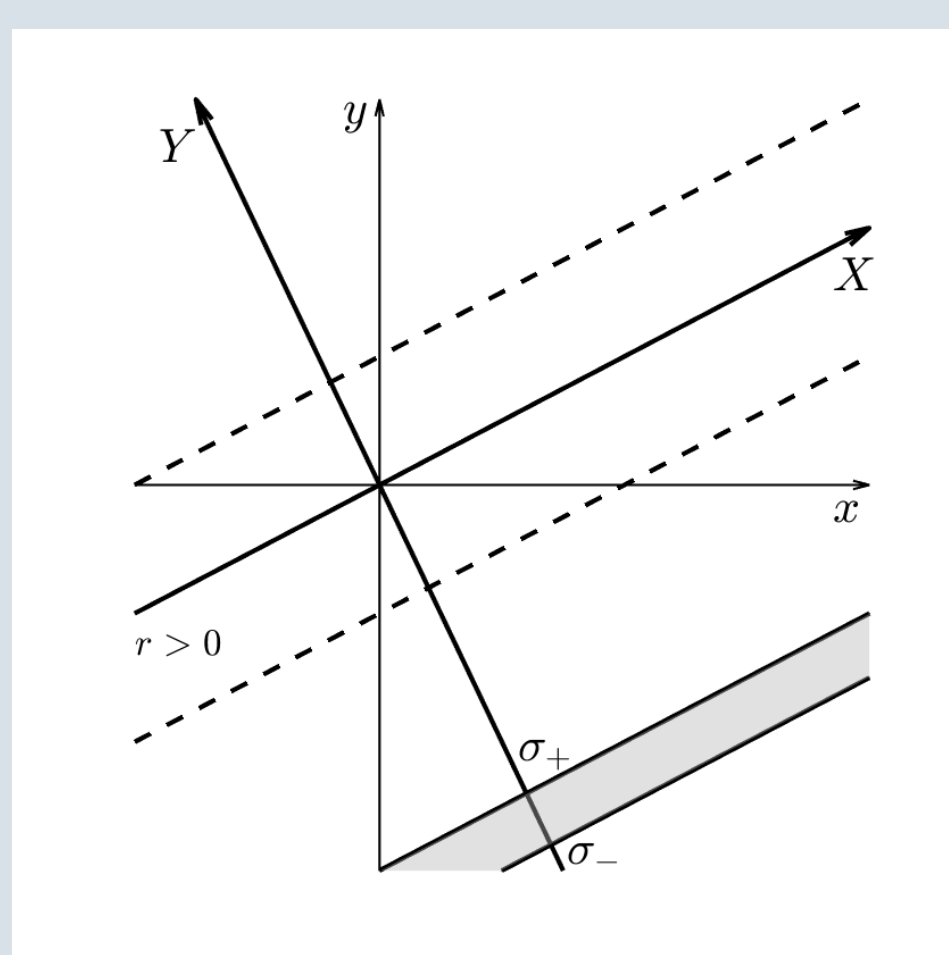
Théorème : supposons que $n_0(x, y) \geq u_0(X) \mathbf{1}_{[\sigma_-, \sigma_+]}(Y)$ avec u_0 à queue lourde et $\sigma_- < \sigma_+$. Alors il y a accélération : $x_\delta(t)/t \rightarrow +\infty$ pour δ assez petit. De plus, on a l'estimation suivante :

$$x_\delta(t) \geq \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} \min u_0^{-1} \left(e^{(\lambda_0^R + \varepsilon)t} \right), \quad \text{pour } t \text{ assez grand,}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $\lambda_0^R < 0$ la valeur propre principale de $\mathcal{L}^R := -\partial_{YY} - r(Y)$ défini pour $Y \in [-R, R]$.

La preuve consiste à construire une sous-solution \underline{n} qui vérifie $\underline{n} \leq n$ et se propage en accélérant. Cela nécessite de surmonter plusieurs difficultés :

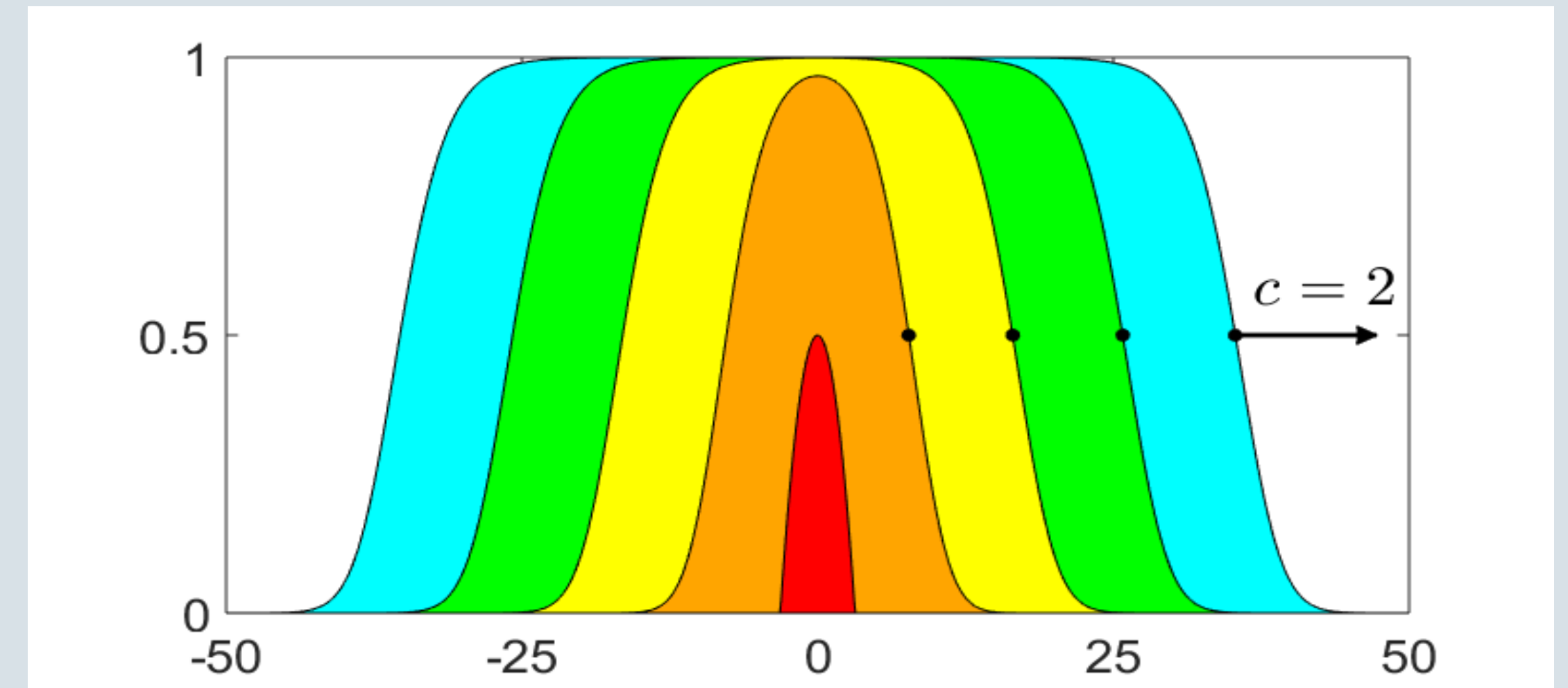
- Le terme intégral dans (2) empêche d'utiliser le principe du maximum. Pour majorer ce terme, nous avons utilisé une inégalité de type Harnack.
- Pour construire une sous-solution qui accélère, on a utilisé une fonction propre principale de \mathcal{L}^R . Pour cela, nous avons dû montrer que $n(t_0, x, y) \geq C u_0(X) \mathbf{1}_{[-R, R]}(Y)$ pour un $t_0 > 0$, ce qui requiert une sous-solution intermédiaire non triviale.



En gris, le domaine où $n_0(x, y) \geq u_0(X)$. Extension du support de la sous-sol. intermédiaire.

2 – ACCÉLÉRATION DE L'INVASION (FISHER-KPP) [3, 5]

Dès que $u_0 \neq 0$, la population survit et envahit peu à peu tout l'espace.



Invasion pour un u_0 (en rouge) à support compact. $u(t, x)$ est représentée toutes les 5 secondes.

Pour mesurer la vitesse de cette invasion, on regarde celle du point $x_{1/2}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour lequel $u(t, x_{1/2}) = 1/2$ (la valeur 1/2 étant arbitraire).

La vitesse d'invasion dépend uniquement du comportement de u_0 en $+\infty$:

- Si u_0 est à support compact, l'invasion se produit à vitesse 2 : $x_{1/2}(t) \sim 2t$.
- Si $u_0(x) \underset{+\infty}{\sim} C e^{-\alpha x}$, alors $x_{1/2}(t) \sim c_\alpha t$ avec $c_\alpha \in [2, +\infty[$ (selon $\alpha > 0$).
- Si $u_0(x) \underset{+\infty}{\sim} C x^{-\alpha}$, alors $x_{1/2}(t) \sim C' \exp(t/\alpha)$.
- Plus généralement, si la queue de u_0 est *lourde* (i.e. décroît moins vite que $e^{-\alpha x}$), alors la vitesse est sur-linéaire, donc on a accélération de l'invasion.

5 – LORSQUE $n_0(x, y)$ EST À SUPPORT COMPACT [1]

Pour le modèle évolutif (2), la survie ou l'extinction de la population dépend du signe de la valeur propre principale, notée λ_0 , de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}n := -\partial_{xx} n - \partial_{yy} n - r(x, y)n.$$

Dans notre cadre, on a $\lambda_0 = \sqrt{A(1+B^2)} - 1$. Si $\lambda_0 > 0$, la population s'éteint exponentiellement vite. Lorsque $\lambda_0 < 0$ et $n_0 \neq 0$, elle survit et envahit tout l'espace. On se placera sous ces hypothèses dans la suite.

On s'intéresse à la vitesse de propagation de la population, tous traits confondus. On pose donc $N(t, x) = \int n(t, x, y) dy$ et on cherche à connaître la vitesse asymptotique des points $x_\delta(t)$ tels que $N(t, x_\delta(t)) = \delta$.

Lorsque n_0 est à support compact, la vitesse d'invasion est $x_\delta(t) \sim 2t \sqrt{\frac{-\lambda_0}{1+B^2}}$ pour les niveaux δ suffisamment petits. De plus, la population reste concentrée autour du trait optimal lors de l'invasion. En effet, on a $n(t, x, y) \leq C \exp(-k|y - Bx|)$ avec $C, k > 0$.

7 – REMARQUES ET OUVERTURES

Notre condition de queue lourde sur n_0 n'impose aucune restriction sur σ_+ et σ_- . Le support peut ainsi être aussi étroit et éloigné de zéro que l'on veut.

Toutefois, il est crucial que le support soit orienté selon la direction favorable $X \rightarrow +\infty$. Sinon, la vitesse d'invasion est identique au cas n_0 à support compact.

Dans la lignée de ce travail, les étapes suivantes sont possibles :

- Étudier l'arrière du front, ou la convergence vers une solution stationnaire.
- Incorporer de l'effet Allee, qui tend à ralentir l'invasion, et déterminer le trade-off avec la lourdeur de la queue initiale.
- Changer le terme de mutation en laplacien fractionnaire ou en convolution $J * n - n$, qui ont déjà été étudiés dans le modèle sans évolution [2, 4].
- Considérer des gradients non-linéaires : $r(x, y) = 1 - A(y - \varphi(x))^2$.

8 – RÉFÉRENCES

- [1] M. ALFARO, H. BERESTYCKI, AND G. RAOUL, *The effect of climate shift on a species submitted to dispersion, evolution, growth, and nonlocal competition*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 49 (2017), pp. 562–596.
- [2] X. CABRÉ AND J.-M. ROQUEJOFFRE, *The influence of fractional diffusion in fisher-kpp equations*, Communications in Mathematical Physics, 320 (2013), pp. 679–722.
- [3] R. A. FISHER, *The wave of advance of advantageous genes*, Annals of eugenics, 7 (1937), pp. 355–369.
- [4] J. GARNIER, *Accelerating solutions in integro-differential equations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 43 (2011), pp. 1955–1974.
- [5] F. HAMEL AND L. ROQUES, *Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions*, Journal of Differential Equations, 249 (2010), pp. 1726–1745.