

Vitesse d'invasion anormale dans un système d'équations de réaction-diffusion

Gwenaél Peltier – Institut de Mathématiques de Toulouse

Travail joint avec Grégory Faye

1 – MODÈLE ÉTUDIÉ

On considère le système suivant, qui modélise l'évolution et la propagation de deux espèces u et v :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1-u) + \beta v^p(1-u) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $d, \alpha, \beta, p > 0$. Remarquons que l'espèce v évolue indépendamment de l'espèce u .

3 – OBJECTIFS

On se place dans le cas couplé $\beta > 0$. Numériquement, la composante u ressemble à un front, mais on n'a aucune certitude. Ce qui nous intéresse est la vitesse asymptotique de propagation de la composante u .

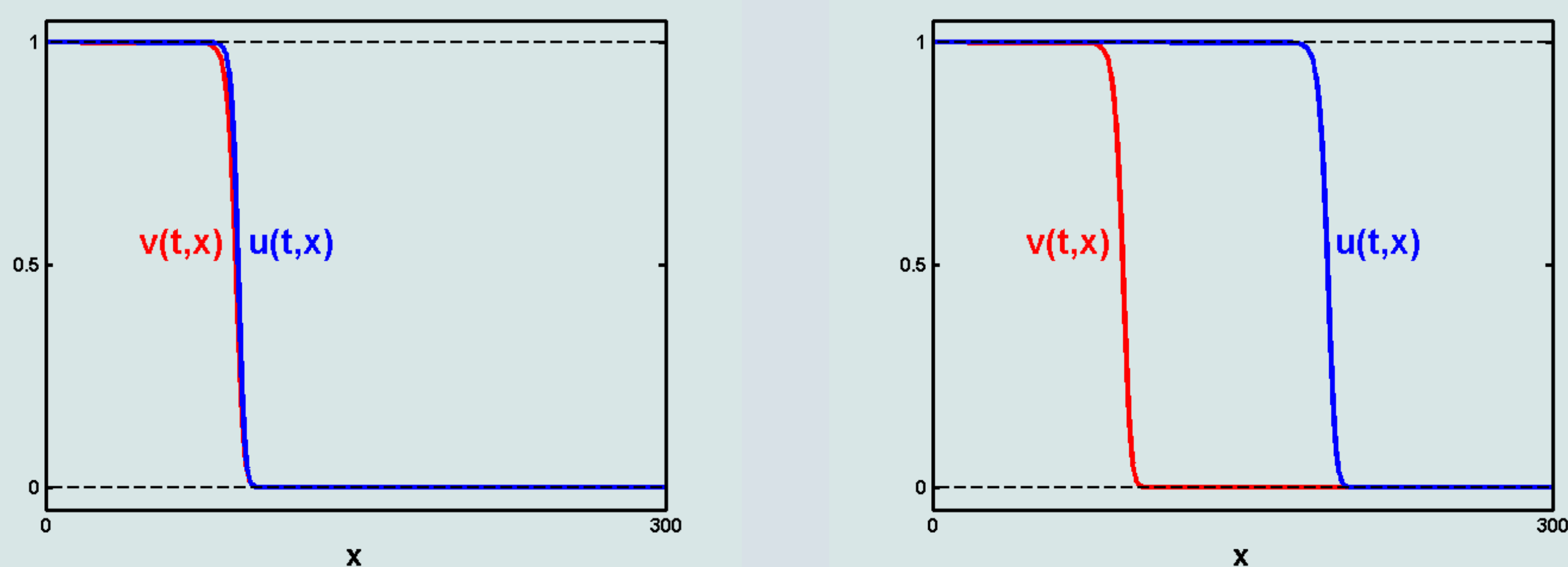
Ainsi, on définit respectivement le point d'invasion et la vitesse sélectionnée par

$$\kappa(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \mid u(t, x) > \frac{1}{2} \right\} \quad s_{sel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t)}{t}$$

Objectif : connaître l'expression de s_{sel} en fonction des paramètres d, α, β et p .

4 – CE À QUOI ON POURRAIT S'ATTENDRE

On pourrait croire que $s_{sel} = \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$, comme le montre ces simulations :



Profil de u et v en temps long, pour $d = \alpha = 0.5, \beta = p = 1$, donc pour $2\sqrt{d\alpha} < 2$. La composante v impose sa dynamique à u , qui se propage à la vitesse 2.

Profil de u et v en temps long, pour $d = \alpha = 2, \beta = p = 1$, donc pour $2\sqrt{d\alpha} > 2$. Le terme $\beta v^p(1-u)$ n'influence plus la dynamique et u se propage à la vitesse $2\sqrt{d\alpha}$.

En fait, on constate qu'il y a des valeurs de d, α, p telles que $s_{sel} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$, et ce indépendamment de β . On parlera alors de vitesse anormale.

6 – EXPRESSION DE LA VITESSE SÉLECTIONNÉE

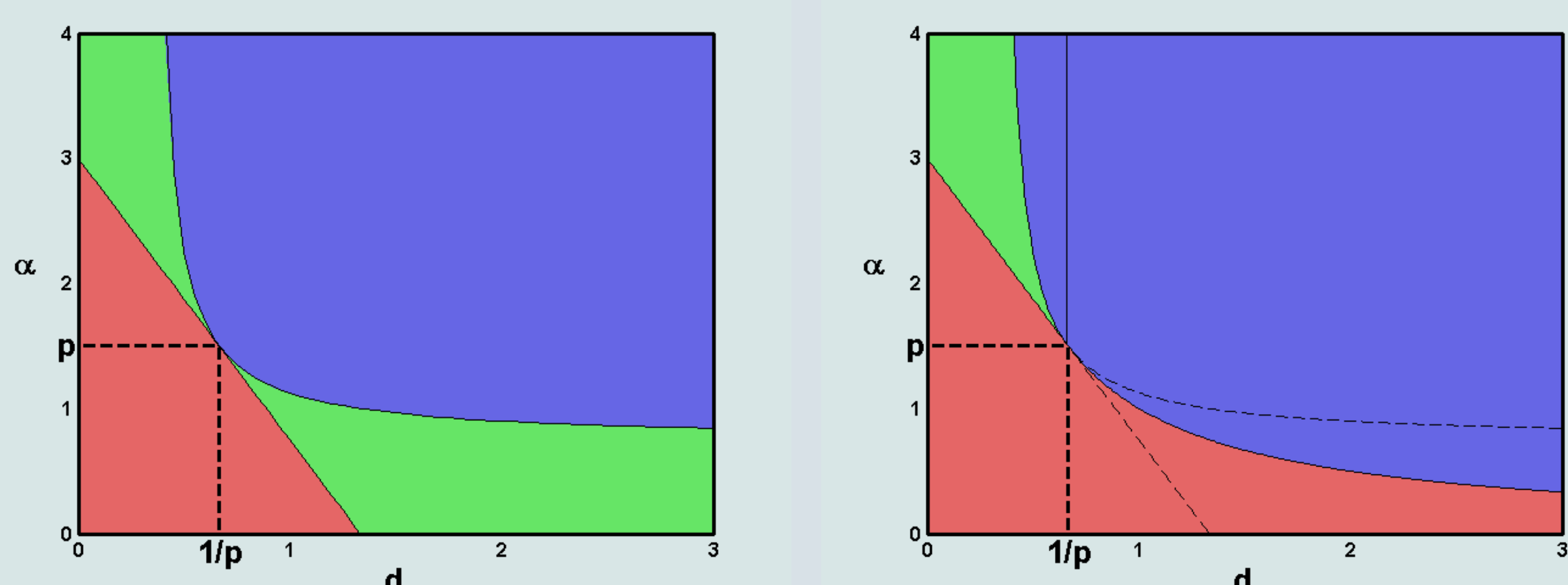
On retourne au système initial. Par des arguments de sous- et sur-solutions similaires, on prouve le résultat suivant.

Théorème : la vitesse sélectionnée du système étudié vérifie :

$$s_{sel} = \begin{cases} 2 & , \text{ si } \alpha \leq 2p - dp^2 \\ 2\sqrt{d\alpha} & , \text{ si } d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1} \\ s_{anom} & , \text{ sinon, pour } d < 1/p \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}) & , \text{ sinon, pour } d \geq 1/p \end{cases}$$

La vitesse s_{sel} est fonction continue des paramètres d, α, p . Finalement, la vitesse du sur-système \bar{s}_{sel} prédit assez bien s_{sel} , comme le montre les figures suivantes.

En rouge, $s_{sel} = 2 = c_v^*$. En bleu, $s_{sel} = 2\sqrt{d\alpha} = c_u^*$. En vert, $s_{sel} = s_{anom}$.

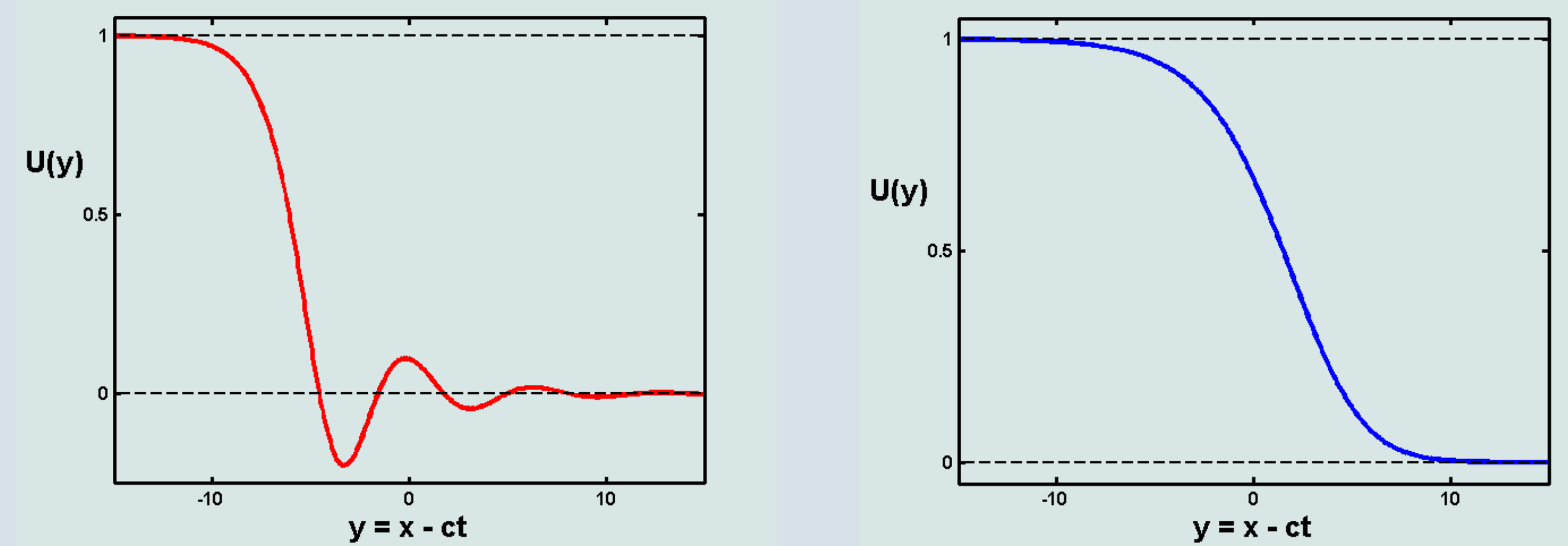


Sur-système $p = 1.5, \beta$ quelconque.

Système initial, $p = 1.5, \beta$ quelconque.

2 – CAS DÉCOUPLÉ $\beta = 0$

En considérant $\beta = 0$, l'équation vérifiée par u devient $u_t = du_{xx} + \alpha u(1-u)$. C'est une équation de type Fisher-KPP classique, qui admet des solutions sous forme de fronts : $U_c(t, x) = U_c(x - ct)$ pour tout $c > 0$. On pose $c_u^* := 2\sqrt{d\alpha}$.



Profil de U_c pour $c < c_u^*$. Comme $U_c < 0$ en certains points, ce front n'est pas physiquement acceptable.

Profil de U_c pour $c \geq c_u^*$. Les propriétés ci-dessus étant vérifiées, c'est un front admissible se propageant à vitesse c .

Pour la condition initiale $u(0, x)$, u converge vers le front (ou plutôt un de ses traduits) de vitesse c_u^* . De même, v converge vers un front de vitesse $c_v^* = 2$.

5 – SUR-SYSTÈME

A partir du système de départ, on enlève les termes à contribution négative, à savoir $-\alpha u^2, -\beta v^p u$ et $-v^2$. On obtient ainsi un sur-système. Il donne une borne supérieure pour s_{sel} , mais est aussi un bon prédicteur de cette vitesse.

Par un changement de variable $y = x - st$, on se place dans une fenêtre qui se déplace à la vitesse $s > 0$. Le sur-système devient :

$$\begin{cases} u_t = du_{yy} + su_y + \alpha u + \beta v^p & t > 0, y \in \mathbb{R} \\ v_t = v_{yy} + sv_y + v & t > 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans le cas $\beta = 0$, les solutions élémentaires de ce sur-système seraient

$$\begin{aligned} u(t, y) &= e^{\Lambda t} e^{my} \quad , \Lambda \in \mathbb{C}, m \text{ solution de } dm^2 + sm + \alpha - \Lambda = 0 \\ v(t, y) &= e^{\lambda t} e^{ny} \quad , \lambda \in \mathbb{C}, n \text{ solution de } n^2 + sn + 1 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

Si $\beta \neq 0$, une vitesse anormale apparaît en cas de résonance entre les modes m et n , plus précisément si on a $\Lambda = p\lambda$ et $m(s, \Lambda) = pn(s, \lambda)$. Alors, la vitesse anormale est la valeur s_{anom} telle que pour tout $s \geq s_{anom}$, les résonances arrivent pour $\text{Re}(\Lambda) = p\text{Re}(\lambda) \leq 0$. Cela permet d'assurer la stabilité temporelle de u et v dans la fenêtre $y = x - st$.

Finalement, la vitesse sélectionnée pour le sur-système est donnée par :

$$\bar{s}_{sel} = \begin{cases} 2 & , \text{ si } \alpha \leq 2p - dp^2 \\ 2\sqrt{d\alpha} & , \text{ si } d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1} \\ s_{anom} & , \text{ sinon} \end{cases} \quad s_{anom} = \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}}$$

7 – CONCLUSION

Les résultats énoncés avaient déjà été démontrés dans le cas $p = 1$, où le sur-système est équivalent au système linéarisé autour de $(0,0)$. L'étude de la stabilité est alors plus simple.

Suite à la généralisation de ces preuves pour $p \neq 1$, l'étape suivante est d'étudier le système :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u(1-u)(u+a) + \beta v^p(1-u) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = v(0, x) = \mathbf{1}_{x \leq 0} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $d, \alpha, \beta, p, a > 0$. Une transition particulière peut être observée en $a = 1/2$.

8 – RÉFÉRENCES

- Weinberger, H. F., Lewis, M. A., & Li, B. (2007). Anomalous spreading speeds of cooperative recursion systems. *Journal of mathematical biology*, 55(2), 207-222.
- Holzer, M. (2014). Anomalous spreading in a system of coupled Fisher-KPP equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 270, 1-10.
- Holzer, M. (2015). A proof of anomalous invasion speeds in a system of coupled Fisher-KPP equations. *DCDS-A*, 36(4):2069-2084, 2016.