Contrôle continu 1
le 9 novembre 2018
Durée : **1h05**

Exercice 1. Inverser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour la matrice suivante, calculer les valeurs propres, et donner une base des espaces propres associés
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit f l'application linéaire
$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x - z).$$

a) Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
On considère
$$\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3), \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{B}' = (v_1, v_2), \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
c) Donner la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Exercice 4. *a*) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la rotation d'angle $-\pi/2$.
b) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 5. *a*) Démontrer que l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par la matrice suivante est une isométrie
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer s'il s'agit d'une rotation ou d'une symétrie, et donner l'angle de rotation ou l'axe de symétrie.

Contrôle continu 2
le 7 décembre 2018
Durée : **1h05**

Aucun document autorisé.
Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (**5,5 points**)
(1,5 pt) *a*) Démontrer que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice suivante est une isométrie

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1 pt) *b*) Déterminer s'il s'agit d'une rotation, d'une réflexion ou d'une rotation impropre.
(3 pt) *c*) Déterminer les éléments géométriques (l'angle et l'axe orienté pour une rotation ; le plan pour une réflexion ; l'angle, l'axe orienté et le plan pour une rotation impropre).

Exercice 2. (**7 points**) Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier.
(2 pt) *a*) Le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préservent l'hexagone contient 12 éléments. Donner ces 12 isométries.
Soient R la rotation d'angle $2\pi/3$ et σ la symétrie d'axe AD.
(1 pt) *b*) Est-ce que $R \circ \sigma$ est une rotation ? une symétrie ?
(2 pt) *c*) Déterminer l'élément géométrique de $R \circ \sigma$ (l'angle pour une rotation ; l'axe pour une symétrie).
(2 pt) *d*) Donner sans calcul la trace de $R \circ \sigma$.

Exercice 3. (**4 points**)
Soit $G = C_4 = \{\mathrm{Id}, R, R^2, R^3\}$ (R est une rotation d'angle $\pi/2$).
Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe G n'a pas de représentation ρ telle que

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 pt) *a*) Supposons qu'une telle représentation existe. Trouver $\rho(\mathrm{Id})$, $\rho(R^2)$ et $\rho(R^3)$.
(2 pt) *b*) Obtenir une contradiction. (Utiliser $R \circ R^3 = \mathrm{Id}$).

Exercice 4. (**3,5 points**) Soit $G = C_2 = \{\mathrm{Id}, R\}$ (R est une rotation d'angle π).
(2 pt) *a*) Vérifier que

$$\mathrm{Id} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est bien une représentation du groupe G.
(1,5 pt) *b*) Donner le caractère de cette représentation.

Examen session 1
le 10 janvier 2018
Durée : **2h**
2 pages

Aucun document autorisé.
Les appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (**3,5 points**)

(0,5 pt) *a*) Démontrer que l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice suivante est une isométrie

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 pt) *b*) Déterminer s'il s'agit d'une rotation, d'une réflexion ou d'une rotation impropre.

(2 pt) *c*) Déterminer les éléments géométriques (l'angle et l'axe orienté pour une rotation ; le plan pour une réflexion ; l'angle, l'axe orienté et le plan pour une rotation impropre).

Exercice 2. (**4 points**)

On rappelle la formule pour une rotation

$$f(v) = (\cos\theta)v + (\sin\theta)(w \wedge v) + (1 - \cos\theta)(w \cdot v)w.$$

a) (0,5 pt) Rappeler ce qu'est **précisément** "w" dans cette formule.

b) (2,5 pt) Donner la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe dirigé par $(1, -1, 1)$.

c) (1 pt) Vérifier que la matrice obtenue dans *b*) est bien une matrice d'une isométrie. (Si la vérification ne marche pas, vous n'obtenez pas le point pour cette question. Dans cette situation il faut revoir la question *b*).)

Exercice 3. (**7 points**) Soit $ABCDE$ un pentagone régulier. Soit O le centre du pentagone.

Soit G groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préservent le pentagone.

Soit $R \in G$ la rotation d'angle $2\pi/5$ (autour de O). Soit σ la symétrie d'axe OA.

(0,5 pt) *a*) Quel est l'ordre de σ.

(1 pt) *b*) Quel est l'ordre de R^2.

(0,5 pt) *c*) Est-ce que R et σ sont dans la même classe de conjugaison ?

(2 pt) *d*) Démontrer que R^2 et R^3 sont dans la même classe de conjugaison.

(1 pt) *e*) Est-ce que R et R^3 sont dans la même classe de conjugaison ?

On considère de le sous-groupe $H = \{\mathrm{Id}, R, R^2, R^3, R^4\}$ de G.

(0,5 pt) *f*) Est-ce que H est commutatif ?

(0,5 pt) *g*) Est-ce que G est commutatif ?

(1 pt) *h*) Est-ce que R^2 et R^3 sont dans la même classe de conjugaison de H ?

Tournez la page, s'il vous plaît

Exercice 4. (**3,5 points**)

On note G le groupe d'isométries de la molécule NH_3. On rappelle qu'il contient six éléments Id, R, R^2, σ_1, σ_2, σ_3. On considère les deux caractères χ_1 et χ_2 suivants.

	Id	R	R^2	σ_1	σ_2	σ_3
χ_1	2	-1	-1	0	0	0
χ_2	3	0	0	1	1	1

(1 pt) *a*) Démontrer que χ_1 est irréductible.

(0,5 pt) *b*) Calculer $(\chi_2|\chi_1)$.

(2 pt) *c*) En déduire que χ_2 est réductible. Donner la décomposition de χ_2 en somme d'irréductibles.

Exercice 5. (**4 points**) On considère le groupe $T_d = \mathrm{Isom}(CH_4)$.

(2 pt) *a*) On considère le caractère χ donné par :

$$\begin{array}{rcl} \chi(\mathrm{Id}) & = & 7 \\ \chi(C_3) & = & 1 \\ \chi(C_2) & = & 3 \\ \chi(S_4) & = & -1 \\ \chi(\sigma_d) & = & -3 \end{array}$$

En vous aidant de la table de caractères, décomposer χ en somme de caractères irréductibles.

T_d	Id	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	-1	2	0	0
T_1	3	0	-1	1	-1
T_2	3	0	-1	-1	1

(2 pt) *b*) (question bonus plus compliquée) Déterminer le nombre de caractères (non nécessairement irréductibles) de dimension 3 du groupe T_d.